Växjö University

Department of Mathematics, Statistics and Computer Science

Reports from MASDA - Rapporter från MASDA

Regelbundna konstruerbara månghörningar

Fredrik Persson

Mars
1999

MASDA
Växjö University
S-351 95 VÄXJÖ

Report 9912
ISSN 1400-1942
ISRN HV/MASDA/MA/E/--9912--SE

1 Inledning

Historien om de regelbundna konstruerbara månghörningarna (d v s konstruerbara månghörningar där alla vinklar och alla sidor är lika stora) sträcker sig över 2 000 år bakåt i tiden. Intresset för dessa lär ha uppstått i det antika Grekland, där man inskränkte sig till att finna konstruktioner med hjälp av enbart passare och linjal. Detta matematiska område förenar geometri och algebra på ett intressant sätt och huvudsyftet med denna uppsats är att på ett så enkelt sätt som möjligt klargöra vilka regelbundna månghörningar som generellt är konstruerbara. För att förstå problemets bakgrund, så upptas en stor del av uppsatsen av en historisk tillbakablick. Speciellt ägnas ett längre avsnitt åt Euklides *Elementa*, eftersom detta verk innefattar de antika grekernas upptäckter inom området.

Gauss hade inte tillgång till den abstrakta algebran när han ”slog spiken i kistan” och gjorde en uttömlig utforskning av de regelbundna konstruerbara månghörningarna. Hans bevis kan te sig ganska svårgenomträngligt och behandlas inte i denna uppsats, men står att läsa om i hans stora verk *Disquisitiones Aritmeticae*. I denna uppsats har jag i stället valt att använda just den abstrakta algebran för att på ett mer lättöverskådligt sätt nå fram till det generella beviset. Jag är medveten om att en del av begreppen och satserna från den abstrakta algebran inte är helt okomplicerade, men jag har försökt att förklara dem på ett så enkelt sätt som möjligt, samt behandla dem i en för uppsatsen logisk ordning.

Uppsatsen behandlar också de tre klassiska problemen, nämligen kubens fördubbling vinkelns tredelning och cirkelns kvadratur. Dessa problem kanske kan tyckas falla utanför uppsatsens ram, men de är ändå intressanta ur både ett historiskt och ett vidare matematiskt perspektiv. Strävan efter att finna lösningen på de klassiska problemen kanske i sig kan förefalla en aning banal, men tack vare matematikernas mödor inom detta område har en rad nya matematiska upptäckter gjorts. Dessutom finns en intressant koppling mellan de klassiska problemen och de regelbundna konstruerbara polygonerna. Antikens greker lär nämligen börjat undersöka vinkelns tredelning i hopp om att utifrån en liksidig triangel konstruera en regelbunden niohörning.

2 Historiskt perspektiv – från antiken till Gauss

2.1 Geometrins verktyg – passare och linjal

Historien om de geometriska verktygen börjar i antikens Grekland, ca 2 300 år bakåt i tiden. Enligt litteraturen skall vid denna tiden en konflikt ha utbrutit mellan å ena sidan Platon och å andra sidan Eudoxos och Archytas, vilka var medlemmar i Platons *Akademi*. Konflikten uppstod då Eudoxos och Archytas införde mekaniska metoder och fysikaliska tolkningar av geometrin, vilket lär ha kränkt Platon djupt. Det kan verka svårt för oss att förstå varför dessa tolkningar av geometrin kunde utgöra grogrund till en djup konflikt, men man skall ha klart för sig att det vid denna tid gjordes en sträng distinktion mellan geometri och mekanik.

Platon var i grunden ingen matematiker, utan filosof, men hans ställning som ledare av *Akademin* – ett viktigt matematiskt och astronomiskt forskningscentrum – gjorde att hans åsikter vägde tungt. Platon intresserade sig för matematikens objekt medan andra, som Aristoteles och senare Euklides, ägnade sig mer åt den vetenskapliga metoden. Konflikten mellan Platon och hans två lärjungar anses så småningom ha mynnat ut i en sorts kompromiss, där man kom överens om att i fortsättningen endast godkänna linjalen och passaren som tillåtna konstruktionshjälpmedel. Valet av dessa båda redskap kan anses naturligt eftersom passaren och linjalen vid denna tid var allmänt vedertagna hjälpmedel och man kände redan till ett otal konstruktioner, vissa mycket avancerade, som gick att utföra med hjälp av dessa. Många lekte säkert också med tanken att *alla* konstruktioner gick att utföra med hjälp av dessa redskap.

2.2 De tre klassiska problemen

2.2.1 Kubens fördubbling (Det *Deliska problemet*)

Problemet om kubens fördubbling lär för första gången ha dykt upp på Kreta. Där härskade under bronsåldern den mytiska kungen Minos och det berättas att han var missnöjd med en 100 kubikfot stor kubformad gravsten som skapats till minne av hans son. Han ville att gravstenens volym skulle fördubblas och beordrade därför några matematiker att lösa problemet, vilket de dock ej klarade.

Problemet dök åter upp ca 400 f.Kr, då pesten härjade i Aten. För att bli kvitt epidemin rådfrågade atenarna oraklet på ön Delos. Oraklet lät meddela att pesten var ett straff från gudarna, då dessa känt sig förolämpade över att det kubiska altaret i Apollos tempel var för litet, och föreslog därför att atenarna skulle fördubbla altaret. Trots stora ansträngningar lyckades atenarna ej lösa problemet och pesten härjade vidare.

Problemet löstes sedermera av flera matematiker, men i dessa lösningar användes fler hjälpmedel än de i antiken tillåtna. Exempelvis så gav Menechmaos (omkring 350 f.Kr.) en konstruktion där han använde sig av kägelsnitt.

2.2.2 Cirkelns kvadratur

Problemet att till en given cirkel konstruera en lika stor kvadrat härstammar från den pythagoreiska areageometrin. Syftet med denna geometri var att transformera en given yta till en lika stor kvadratisk yta. Hippokrates (omkring 450 f.Kr.) lyckades visserligen kvadrera halvmånformiga figurer, men cirkelns kvadratur visade sig svårare och grekerna gick bet på att lösa detta problem på klassiskt vis. För att överhuvudtaget finna en lösning fick antikens matematiker ta till, förutom passare och linjal, även andra redskap, såsom *quadratrixer* och *Archimedes spiral*.

2.2.3 Vinkelns tredelning

Detta problem härstammar förmodligen från försöken att utifrån en regelbunden triangel konstruera en regelbunden niohörning.

Euklides visar i *Elementa* (bok I, sats 9) hur man, med hjälp av endast passare och linjal, kan dela en vinkel i två lika delar. Att med enbart dessa hjälpmedel dela en vinkel i tre lika delar visade sig dock svårare. Flera matematiker – bland dem Archimedes – lyckades så småningom lösa problemet, men precis som med de andra två klassiska problemen var man tvungen att ”fuska”, d v s använda andra hjälpmedel än de i antiken vedertagna.

På liknande sätt som man visar vilka regelbundna månghörningar som är konstruerbara, kan man visa varför kubens fördubbling och vinkelns tredelning är omöjliga att genomföra med passare och linjal, men mer om detta i avsnitt 3.6. Cirkelns kvadratur är ett långt svårare problem, men lite om det nämns i avsnitt 3.6.

2.3 Euklides och hans *Elementa*

Euklides var en grekisk matematiker som verkade i Alexandria under det 3:e århundradet före Kristus. Hans mest berömda verk är *Elementa* (grek. *Stoicheia*) som näst bibeln är den mest spridda skriften i västerlandet. Verket, som är indelat i 13 böcker, är ett systematiskt axiomatiskt-deduktivt studium av geometrins och aritmetikens grundvalar. I klartext innebär detta att *Elementa* utgår från givna definitioner och grundsatser och utifrån dessa härleds (bevisas) ytterligare satser.

Bok I-VI innehåller grundläggande satser om plangeometrin. Dessa böcker är därför särskilt intressanta för denna uppsats. I bok I återfinns också de fyra kongruensfallen.

Bok VII-IX innehåller aritmetiska satser och bygger på tidiga resultat av pythagoreerna.

Bok X behandlar s k inkommensurabla storheter och är den enda av de 13 böckerna som idag anses föråldrad.

Bok XI-XIII behandlar bl.a. exakta volymberäkningar och regelbundna polyedrar (de *platonska kropparna*).

Varje bok inleds med ett antal definitioner, av vilka de som är särskilt intressanta för denna uppsats är följande:

- *En **punkt** är något som ej kan delas* (I. def. 1).
- *En **linje** är en längd utan bredd* (I. def. 2).
- *En linjes ändar är punkter* (I. def. 3).
- *En **rät linje** är en linje som ligger jämnt mellan punkterna på densamma* (I. def. 4).
- *En **plan vinkel** är lutningen mellan två linjer i ett plan, som möts och inte ligger i samma linje* (I. def. 8).
- *När en rät linje skär en annan rät linje och bildar närbelägna vinklar som är lika varandra, så är vardera vinkeln **rät**, och den räta linjen som står på den andra kallas en **normal** till den på vilken den står* (I. def. 10).
- *En **cirkel** är en plan figur som består av en linje sådan att alla räta linjer som faller på den utgående från en punkt inuti figuren är lika med varandra* (I. def. 15).
- *Denna punkt kallas cirkelns **centrum*** (I. def. 16).
- *En **diameter** av en cirkel är en rät linje som dras genom cirkelns centrum och som i båda riktningarna upphör på cirkelns periferi, och sådan att den delar cirkeln i två lika delar* (I. def. 17).
- *Av fyrhörningar, så är **kvadraten** den som både är liksidig och rätvinklig. **Rektangeln** är rätvinklig men ej liksidig. **Romben** är liksidig men ej rätvinklig. En **parallellogram** är sådan att motstående sidor och vinklar lika stora, men den är varken likvinklig eller liksidig* (I. def. 22).
- *En rätlinjig figur sägs vara **inskriven i en cirkel** om varje vinkel i denna figur ligger på cirkelns periferi* (IV. def. 3).

I bok I återfinns *Elementas* grundsatser. Dessa indelas i postulat och allmänna grundsatser. Postulaten är följande:

1. *En rät linje kan dras från en punkt till en annan.*
2. *En rät linje kan förlängas godtyckligt till en längre rät linje.*
3. *Kring varje punkt kan beskrivas en cirkel med godtyckligt vald radie.*
4. *Alla räta vinklar är lika med varandra.*
5. *Om en rät linje skär två räta linjer och bildar inre vinklar på samma sida, vars summa är mindre än två räta vinklar, så kommer de två räta linjerna, om de utdras obegränsat att skära varandra på den sidan där de två inre vinklarna ligger.*

De allmänna grundsatserna är följande:

1. *Ting som är lika med ett och samma är också lika med varandra.*
2. *Om lika adderas till lika, är det hela också lika.*
3. *Om lika subtraheras från lika, är differensen lika.*
4. *Ting som är identiska med varandra, är också lika med varandra.*
5. *Det hela är större än delen.*

Postulat 1-3 kan sägas sammanfatta egenskaperna hos de bägge konstruktionsredskapen passare och linjal (dessa redskap brukar också kallas *de euklidiska redskapen)*. Med hjälp av konstruktionsredskapen kan nämligen dessa postulat konkretiseras till följande steg, utifrån vilka de euklidiska konstruktionerna kan utföras:

1. Linjalen kan placeras intill varje godtycklig punkt.
2. Linjalen kan anläggas intill en andra punkt.

3. Om man fixerar linjalen vid en eller två givna punkter, kan man alltid dra en rät linje utefter densamma.
4. Ena benet av passaren kan fixeras i en punkt eller på en rät linje.
5. Man kan fixera ena passarspetsen i en punkt eller på en linje och placera den andra i en annan given punkt eller på en annan rät linje.
6. Man kan rita upp en cirkel eller en del därav så snart passaren är inställd.

I Euklides geometri får man aldrig gå utanför ramen av dessa steg när en konstruktion utförs. Man ska också notera att gradering av linjalen varken är tillåten eller nödvändig när man utför konstruktioner enligt stegen ovan.

Ser man krasst på Euklides geometri så kan sträckan och cirkeln endast konstrueras i tanken, ty postulat 1-3 garanterar blott *existensen* av dessa begrepp. Genom att använda passare och linjal återför dock Euklides alla existenser på postulat 1-3. Hädanefter kom matematikerna att söka efter lösningar på de tre klassiska problemen främst med hjälp av de euklidiska redskapen.

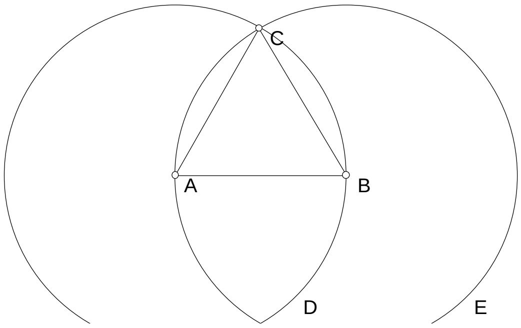
Postulat 5 (brukar kallas *parallellpostulatet*) är särskilt intressant – inte minst för att det vållade huvudbry åt matematikerna i mer än två årtusenden. Frågan som man ställde sig var huruvida denna utsaga kan bevisas utifrån övriga grundsatser i Elementa eller ej. Det finns en tydlig strävan hos Euklides att finna en geometri som klarar sig utan parallellpostulatet. Detta märks tydligt i bok I där han – trots att det hade förenklat flera av bevisen i de tidigare satserna – använder sig av det först i sats 27.

Omkring 1830 visades att parallellpostulatet är oberoende av de övriga postulaten och allmänna grundsatserna i Elementa, och därmed omöjligt att bevisa utifrån dessa. Beviset är ett resultat av att man vid denna tid började konstruera icke-euklidiska geometrier, vilka likt Euklides egen är motsägelsefria, men sådana att parallellpostulatet måste ersättas med andra postulat.

2.3.1 Euklides konstruktion av en liksidig triangel

Att på en given rät linje konstruera en liksidig triangel. (Bok I, sats 1)

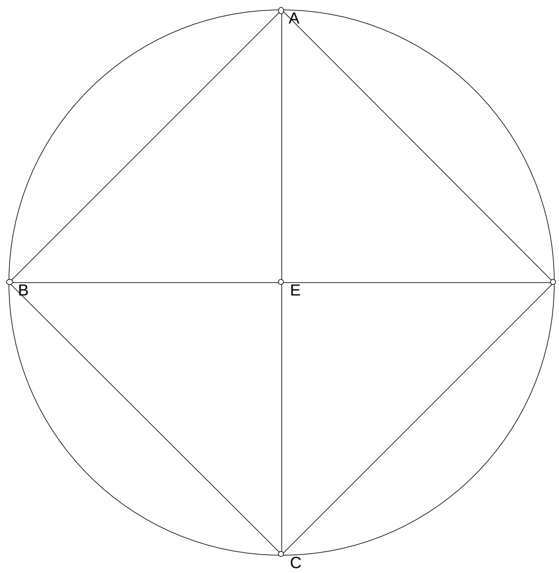
Låt *AB* vara den givna räta linjen.På denna skall konstrueras en liksidig triangel.
Med medelpunkt i *A* konstrueras cirkeln *BCD*. [Post. 3]
Med medelpunkt i *B* konstrueras cirkeln *ACE*. [Post. 3]
Cirklarna skär varandra i *C*. Dra de räta linjerna *CA* resp. *CB*. [Post. 1]
Eftersom *A* är centrum i cirkeln *CDB* så är *AC* lika med *AB*. [I. Def. 15]
Likaså, eftersom *B* är centrum i cirkeln *CAE* så är *BC* lika med *BA*. [I. Def. 15]
Alltså är de räta linjerna *CA* och *CB* lika med *AB*, och ting som är lika med ett och samma är också lika med varandra. [Gr. 1]
Därför är *CA* ,*CB* och *AB* lika med varandra.
Alltså är triangeln *ABC* liksidig och den har konstruerats på den räta linjen *AB*.



2.3.2 Euklides konstruktion av en kvadrat

Att i en given cirkel inskriva en kvadrat. (Bok IV, sats 6)

Låt *ABCD* vara den givna cirkeln. I denna skall inskrivas en kvadrat.
Dra två diametrar, *AC* och *BD*, som skär varandra under räta vinklar. Sammanbind *AB*, *BC*, *CD* och *DA*.
BE är lika med *ED*, ty *E* är medelpunkt i cirkeln, och *EA* är gemensam samt bildar räta vinklar med *BD*. Därför är *AB* lika med *AD*. [I. 4]
Av samma anledning är *BC* och *CD* lika med *AB* respektive *AD*, och därmed är fyrhörningen ABCD liksidig.
Nedan visas att den också är rätvinklig.
Eftersom *BD* är diameter till cirkeln *ABCD*, så är *BAD* en halvcirkel. Därmed är vinkeln *BAD* rät. [III. 31]
Av samma anledning är var och en av vinklarna *ABC*, *BCD* och *CDA* också räta och därmed är fyrhörningen *ABCD* rätvinklig.
Alltså är fyrhörningen *ABCD* en kvadrat. [I. Def 22]



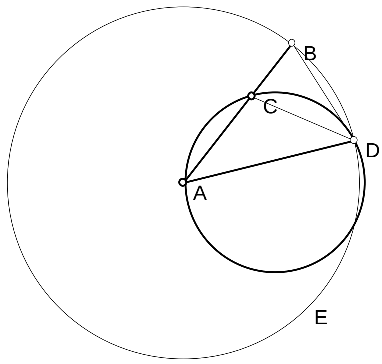
Kommentar:
Sats [I. 4] brukar kallas *kongruensfall* 1. Detta kongruensfall säger att *två trianglar är kongruenta om två sidor och mellanliggande vinkel i den ena triangeln är lika med motsvarande element i den andra triangeln.*
Sats [III. 31] säger att *en randvinkel på en halvcirkelbåge alltid är rät.*

2.3.3 Euklides konstruktion av en regelbunden femhörning

För att kunna konstruera en regelbunden femhörning visar Euklides först följande sats:

Att konstruera en likbent triangel, sådan att var och en av basvinklarna är dubbelt så stor som den återstående vinkeln. (Bok IV, sats 10)

Låt *AB* vara en given rät linje och låt *C* vara en punkt på *AB*, sådan att Rekt. *AB*, *BC* = Kvad. *CA*. [II. 2]
Konstruera en cirkel *BDE* med centrum i *A* och radie *AB*, så att *BD* är lika med *AC*. [IV. 1]
Sammanbind *AD* och *DC* och omskriv cirkeln *ACD* runt triangeln *ACD*. [IV. 5]
Eftersom Rekt. *AB*, *BC* är lika med Kvad. *AC* och *AC* är lika med *BD*, så är Rekt. *AB*, *BC* lika med Kvad. *BD*.
Eftersom punkten *B* ligger utanför cirkeln *ACD* och eftersom linjen *BD* faller på cirkeln *ACD*, medan linjen *BA* skär cirkeln *ACD*, samt eftersom dessutom Rekt. *AB*, *BC* är lika med Kvad. *BD*, så tangerar *BD* cirkeln *ACD*. [III. 37]
Eftersom *BD* är korda och tangerar cirkeln *ACD* så är vinkeln *BDC* lika med vinkeln *DAC*. [III. 32]
Då vinkeln *BDC* är lika med vinkeln *DAC*, så är vinkeln *BDA* lika med vinklarna *CDA* och *DAC* tillsammans.
Men vinkeln *BCD* är lika med summan av vinklarna *CDA* och *DAC* [III. 32], varför vinkeln *BDA* också är lika med vinkeln *BCD*.
Men vinkeln *BDA* är lika med vinkeln *CBD*, ty *AD* är lika med *AB* [III. 5] och därför är vinkeln *DBA* lika med vinkeln *BCD*.
Därför är de tre vinklarna *BDA*, *DBA* och *BCD* lika med varandra.
Eftersom dessutom vinkeln *DBC* är lika med vinkeln *BCD*, så är linjen *BD* lika med linjen *DC*. [I. 6]
Men *BD* är lika med *CA*, varför *CA* också är lika med *CD* vilket medför att vinkeln *CDA* också är lika med vinkeln *DAC*. [I. 5]
Därför är vinklarna *CDA* och *DAC* tillsammans dubbelt så stora som vinkeln *DAC*.
Men vinkeln *BCD* är lika med summan av vinklarna *CDA* och *DAC*, varför vinkeln *BCD* är dubbelt så stor som vinkeln *CAD*.
Dessutom är vinkeln *BCD* lika med vardera vinklarna *BDA* och *DBA*, vilket medför att var och en av vinklarna *BDA* och *DBA* är dubbelt så stor som vinkeln *DAB*.
Därmed har den likbenta triangeln *ABD* konstruerats så att var och en av basvinklarna är dubbelt så stor som den återstående vinkeln.

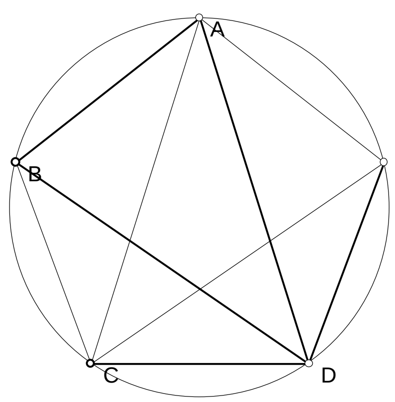


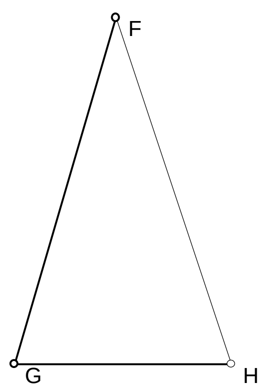
Kommentar:
Det vore alltför omfattande att visa alla de satser som beviset bygger på. Vi nöjer oss därför med att definiera några av dem.
Sats [I. 5] brukar kallas *basvinkelsatsen*. Den säger att *i en likbent triangel är vinklarna vid basen lika och likaså vinklarna mellan basen och benens förlängningar*.
Sats [III. 5] säger att *två cirklar som skär varandra inte har samma medelpunkt.*
Sats [III. 37] är omvändningen av kordasatsen.

Nu över till konstruktionen av den regelbundna femhörningen:

Att i en given cirkel inskriva en regelbunden femhörning. (Bok IV, sats 11)

Låt *ABCDE* var den givna cirkeln. I denna skall inskrivas en regelbunden femhörning.
Konstruera en likbent triangel *FGH* med vinklarna vid *G* och *H* dubbelt så stora som vinkeln vid *F*. [IV. 10]
Inskriv i cirkeln *ABCDE* en triangel *ACD* som är likvinklig med triangeln *FGH* så att vinkeln *CAD* är lika med vinkeln vid *F*, och vinklarna *ACD* resp. *CDA* är lika med vinklarna vid *G* resp. *H*. [IV. 2]
Därmed är också var och en av vinklarna *ACD* och *CDA* dubbelt så stor som vinkeln *CAD*.
Dra nu bisektriserna *CE* och *DB* till vinklarna *ACD* resp. *CDA*.. [I. 9]
Sammanbind sedan *AB*, *BC*, *DE* och *EA*.
Eftersom vardera vinkeln *ACD* och *CDA* är dubbelt så stor som vinkeln *CAD*, och eftersom *CE* och *DB* är bisektriser till vinklarna *ACD* och *CDA*, så är vinklarna *DAC*, *ACE*, *ECD*, *CDB* och *BDA* lika.
Men lika randvinklar står på lika bågar [III. 26], och därmed är bågarna *AB*, *BC*, *CD*, *DE* och *EA* lika.
Men lika bågar står mot lika kordor [III. 29], och därmed är de de räta linjerna *AB*, *BC*, *CD*, *DE* och *EA* lika.
Därför är femhörningen *ABCDE* liksidig.
Nedan visas att den också är likvinklig.
Eftersom cirkelbågen *AB* är lika med cirkelbågen *DE*, så är cirkelbågen *ABCD* lika med cirkelbågen *EDCB*, ty bågen *BCD* är gemensam för dessa.
Vinkeln *AED* står på cirkelbågen *ABCD* och vinkeln *BAE* står på cirkelbågen *EDCB*, och därmed är vinkeln *BAE* lika med vinkeln *AED*. [III. 27]
Av samma skäl är vardera vinkeln *ABC*, *BCD* och *CDE* lika med vardera vinkeln *BAE* och *AED*.
Därför är femhörningen *ABCDE* också likvinklig.



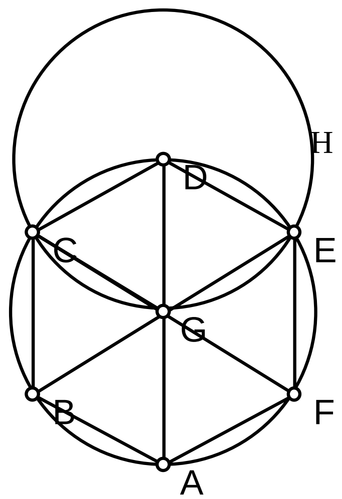


Kommentar:
Sats [I. 9] säger att en vinkel kan delas mitt itu.

2.3.4 Euklides konstruktion av en regelbunden sexhörning

Att i en given cirkel inskriva en regelbunden sexhörning. (Bok IV, sats 15)

Låt *ABCDEF* vara den givna cirkeln. I denna skall inskrivas en regelbunden sexhörning.
Dra diametern *AD* och konstruera en cirkel *EGCH* med centrum i *D* och med radie *DG*, där *G* är centrum i cirkeln *ABCDEF*.
Drag diametrarna *FGC* och *BGE* och sammanbind *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* och *FA*.
Eftersom *G* är centrum i cirkeln *ABCDEF*, så är *GE* lika med *GD*.
Likaså, eftersom *D* är centrum i cirkeln *GCH*, så är *DE* lika med *DG*.
Därmed är *GE* och *ED* lika och därför är triangeln *EGD* likksidig.
Detta medför att vinklarna *EGD*, *GDE* och *DEG* är lika, ty i likbenta trianglar är basvinklarna lika [I. 5] och de tre vinklarna är lika med två räta [I. 32], och därmed är vinkeln *EGD* en tredjedel av två räta vinklar.
På motsvarande sätt kan visas att vinkeln *DGC* är en tredjedel av två räta vinklar.
Eftersom den räta linjen *CG* står på *EB*, så är de närliggande vinklarna *EGC* och *CGB* lika med två räta.
Därför är den återstående vinkeln *CGB* också en tredjedel av två räta vinklar.
Alltså är vinklarna *EGD*, *DGC* och *CGB* lika, vilket medför att deras vertikalvinklar *BGA*, *AGF* och *FGE* är lika [I. 15]
Därmed är vinklarna *EGD*, *DGC*, *CGB*, *BGA*, *AGF* och *FGE* lika.
Men lika randvinklar står på lika cirkelbågar [III. 26] och därför är bågarna *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EF* och *FA* lika.
Lika bågar står mot lika kordor [III. 26] och därför är de sex räta linjerna lika.
Därmed är sexhörningen *ABCDEF* liksidig.
Nedan visas att den också är likvinklig.
Eftersom bågen *FA* är lika med bågen *ED*, så är bågen *FABCD* lika med bågen *EDCBA*, ty bågen *ABCD* är gemensam för båda.
Vinkeln *FED* står på bågen *FABCD* och vinkeln *AFE* står på bågen *EDCBA* och därför är dessa båda vinklar lika [III. 27]
På motsvarande sätt kan man visa att de återstående vinklarna i sexhörningen *ABCDEF* också är lika med vinkeln *AFE* resp. *FED*.
Därför är sexhörningen *ABCDEF* också likvinklig.

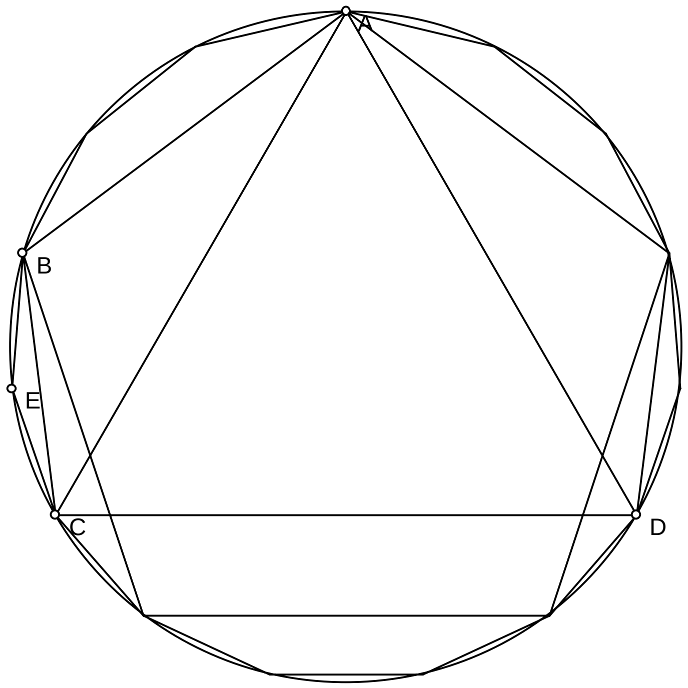


Kommentar:.
Sats [I. 32] säger att *i varje triangel är en yttervinkel lika med summan av de båda inre motstående vinklarna samt därjämte triangelns vinklar tillsammans med två räta.* Matematikerna insåg tidigt att denna sats är ekvivalent med *parallellpostulatet*.

2.3.5 Euklides konstruktion av en regelbunden femtonhörning

Att i en given cirkel inskriva en regelbunden femtonhörning. (Bok IV, sats 16)

Låt *ABCD* vara den givna cirkeln. I denna skall inskrivas en regelbunden femtonhörning.
Låt *AC* och *AB* vara sidor i en regelbunden triangel resp. femhörning som är inskrivna i cirkeln.
Av de femton lika segmenten i femtonhörningen kommer därför fem ligga på cirkelbågen *ABC*, ty denna utgör en tredjedel av cirkeln.
Vidare kommer det att ligga tre segment på cirkelbågen *AB*, ty denna utgör en femtedel av cirkeln.
Därmed kommer det att ligga två segment på den återstående cirkelbågen *BC*.
Dela *BC* i två lika delar [III. 30] och kalla mittpunkten *E*.
Då är var och en av cirkelbågarna *BE* och *EC* lika med en femtondel av cirkel *ABCD*.
Om man nu sammanbinder *BE* och *EC* och avsätter räta linjer, lika långa som dessa, runt om i cirkeln, så fås en regelbunden femtonhörning inskriven i cirkeln *ABCD*.



2.4 Gauss och den regelbundna 17-hörningen

Sedan antiken kände man alltså till att följande konstruktioner av regelbundna månghörningar går att utföra med passare och (ograderad) linjal:

1. Den regelbundna triangeln, kvadraten, femhörningen, sexhörningen och femtonhörningen.
2. De regelbundna månghörningar som fås då man ett godtyckligt antal gånger fördubblar sidoantalet hos de ovanstående månghörningarna (t ex 8-, 12-, 20-, och 30-hörningen).

Efter detta stod utvecklingen inom området still under ca 2 000 år, tills Carl Friedrich Gauss vid 18 års ålder lyckades konstruera en regelbunden 17-hörning, samt bevisa vilka regelbundna månghörningar som överhuvudtaget är konstruerbara.

Carl Friedrich Gauss föddes i Braunschweig i Tyskland den 30 april 1777. Tidigt upptäcktes Gauss´ matematiska begåvning. En välkänd händelse är från en matematiklektion då Gauss var 10 år; läraren uppmanade då eleverna att summera de hela talen från 1 till och med 100. Gauss lämnade efter en mycket kort betänketid fram sin griffeltavla på lärarens kateder, alltmedan de övriga eleverna slet med sina algoritmer. På tavlan stod det rätta svaret, 5050. Gauss förklarade att han grupperat 50 sifferpar (1 och 100, 2 och 99 o s v), vilkas summa alla är 101 och sedan multiplicerat 101 med 50. Gauss kände vid denna tid inte till formeln för den aritmetiska summan, utan detta är ett typexempel på hans fantastiska matematiska intuition.

Redan vid 15 års ålder började Gauss fundera över den euklidiska geometrins grundvalar. 1795 började Gauss på universitetet i Göttingen och de kommande åren kom att bli hans mest produktiva. 1796 visade han, som ovan nämnts, hur man med passare och linjal konstruerar en regelbunden 17-hörning. Upptäckten var inte bara en fantastisk matematisk prestation, utan den kan också ha spelat en annan avgörande roll; en nära vän till Gauss sade nämligen i sin minnesskrift att Gauss blev fullständigt säker i valet av studieriktning först sedan han löst detta matematiska problem. Till saken hör att Gauss även hade stora språktalanger och eftersom humanister vid denna tiden hade bättre ekonomiska framtidsutsikter än naturvetare, så torde valet inte varit helt självklart.

2.4.1 Gauss´ bevis av 17-hörningens konstruerbarhet

Ett nödvändigt redskap för att Gauss skulle kunna bevisa att det var möjligt att konstruera en regelbunden 17-hörning var de komplexa talen, vilka vid denna tid började bli alltmer accepterade av matematikerna. Gauss utvecklade det komplexa talplanet, som också brukar kallas det Gausska talplanet. I detta talplan är *y*-axeln från det vanliga koordinatsystemet ersatt med den *imaginära* axeln. Ett komplext tal $z = a + bi$ avsätts i det Gausska talplanet som en punkt, där a och b är koordinater på reella respektive imaginära axeln. Eftersom varje reellt tal är ett komplext tal med imaginärdelen 0 så är de komplexa talen en utvidgning av de reella.

Gauss studerade den binomiska ekvationen $r^{17} - 1 = 0$. Han insåg sambandet mellan det geometriska problemet att dela en cirkel i 17 lika delar och det algebraiska problemet att hitta en konstruerbar rot till denna ekvation. Han plockade bort den triviala roten $r_0 = 1$ genom att dividera ekvationen med $r - 1$. Han fick då ekvationen

(1) $$\frac{r^{17}-1}{r-1} = r^{16} + r^{15} + \dots + r + 1 = 0.$$

Rötterna till denna ekvation är i det komplexa talplanet representerade som hörn i en regelbunden 17-hörning som är inskriven i enhetscirkeln, där $r_0 = 1$ utgör det 17:e hörnet. Dessa rötter kan skrivas

$$r_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right),\ k = 1,2,\dots,16 .$$

Studera nu Fermats lilla sats. Denna säger:

Om p är ett primtal och a är ett heltal som inte är delbart med p så gäller kongruensen
$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Om $p - 1$ är den lägsta exponenten som för ett givet heltal a uppfyller denna kongruens så säges a vara en primitiv rot modulo p. Den grundläggande idén för att visa att en 17-hörning är konstruerbar är att finna en primitiv rot modulo 17 och sedan ordna rötterna till (1) i en bestämd cyklisk ordning.

Vi konstaterar att 3 är en primitiv rot modulo 17 ty

$3^1 \equiv 3 \pmod{17}$	$3^2 \equiv 9 \pmod{17}$	$3^3 \equiv 10 \pmod{17}$
$3^4 \equiv 13 \pmod{17}$	$3^5 \equiv 5 \pmod{17}$	$3^6 \equiv 15 \pmod{17}$
$3^7 \equiv 11 \pmod{17}$	$3^8 \equiv 16 \pmod{17}$	$3^9 \equiv 14 \pmod{17}$
$3^{10} \equiv 8 \pmod{17}$	$3^{11} \equiv 7 \pmod{17}$	$3^{12} \equiv 4 \pmod{17}$
$3^{13} \equiv 12 \pmod{17}$	$3^{14} \equiv 2 \pmod{17}$	$3^{15} \equiv 6 \pmod{17}$
$3^{16} \equiv 1 \pmod{17}$.		

Vi döper nu rötterna till (1) efter resterna ovan och skriver dem i följande ordning:

$$r_3, r_9, r_{10}, r_{13}, r_5, r_{15}, r_{11}, r_{16}, r_{14}, r_8, r_7, r_4, r_{12}, r_2, r_6, r_1$$

Nu sätts dessa samman till summor av 2, 4 resp. 8 rötter på följande sätt; tag först varannan rot med början i r_9 och gör en summa av dessa.

$$x_1 = r_9 + r_{13} + r_{15} + r_{16} + r_8 + r_4 + r_2 + r_1$$

Sedan tas varannan rot med början i r_3 och en summa görs av dessa.

$$x_2 = r_3 + r_{10} + r_5 + r_{11} + r_{14} + r_7 + r_{12} + r_6$$

Nu utgår man från x_1 och x_2 och formar på motsvarande sätt som ovan 4 perioder med 4 termer i vardera.

$$y_1 = r_{13} + r_{16} + r_4 + r_1$$
$$y_2 = r_9 + r_{15} + r_8 + r_2$$
$$y_3 = r_{10} + r_{11} + r_7 + r_6$$

$$y_4 = r_3 + r_5 + r_{14} + r_{12}$$

Nu utgår man från y_1, y_2, y_3 och y_4 och formar på motsvarande sätt som innan 8 perioder med 2 termer i vardera.

$$z_1 = r_{16} + r_1 \qquad z_2 = r_{13} + r_4$$
$$z_3 = r_{15} + r_2 \qquad z_4 = r_9 + r_8$$
$$z_5 = r_{11} + r_6 \qquad z_6 = r_{10} + r_7$$
$$z_7 = r_5 + r_{12} \qquad z_8 = r_3 + r_{14}$$

Eftersom

$$r_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right)$$

och

$$r_{(17-k)} = \cos\left(\frac{(17-k)2\pi}{17}\right) + i\sin\left(\frac{(17-k)2\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{2k\pi}{17}\right) - i\sin\left(\frac{2k\pi}{17}\right)$$

så är

$$z_1 = r_{16} + r_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).$$

På samma sätt är

$$z_2 = 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right),\quad z_3 = 2\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right),\quad z_4 = 2\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right),\quad z_5 = 2\cos\left(\frac{12\pi}{17}\right),\quad z_6 = 2\cos\left(\frac{14\pi}{17}\right),$$
$$z_7 = 2\cos\left(\frac{10\pi}{17}\right) \text{ och } z_8 = 2\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right).$$

Man ser att

$$z_1 > z_3 > z_8 > z_2 > z_7 > z_5 > z_6 > z_4,$$
$$y_1 > y_4 > y_2 > y_3 \text{ och}$$
$$x_1 > x_2.$$

Vi vet att $z_1 + z_2 = y_1$. Vi har också $z_1 \cdot z_2 = y_4$, ty

$$z_1 \cdot z_2 = 4\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right) = 2\cos\left(\frac{10\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) = r_5 + r_{12} + r_3 + r_{14} = y_4\,.$$

Därmed är z_1 och z_2 rötter till ekvationen $z^2 - y_1 z + y_4 = 0$. Eftersom $z_1 > z_2$ så är

$$z_1 = \frac{y_1 + \sqrt{\left(y_1^2 - 4y_4\right)}}{2}\,.$$

Vi vet att $y_1 + y_2 = x_1$. Vi har också $y_1 \cdot y_2 = -1$, ty

$$y_1 \cdot y_2 = (z_1 + z_2)(z_3 + z_4) =$$
$$= 4\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + 4\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) + 4\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + 4\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)\cdot\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) =$$
$$= 2\cos\left(\frac{6\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{16\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{14\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{12\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{4\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{10\pi}{17}\right) + 2\cos\left(\frac{8\pi}{17}\right)$$
$$= r_3 + r_{14} + r_{16} + r_1 + r_9 + r_8 + r_{10} + r_7 + r_{11} + r_6 + r_{15} + r_2 + r_5 + r_{12} + r_{13} + r_4 = -1.$$

Den sista likheten fås ur (1), eftersom summan av rötterna till (1) är lika med koefficienten för r^{17} med ombytt tecken.

Därmed är y_1 och y_2 rötter till ekvationen $y^2 - x_1 y - 1 = 0$. Eftersom $y_1 > y_2$ så är

$$y_1 = \frac{x_1 + \sqrt{\left(x_1^2 + 4\right)}}{2}.$$

På liknande sätt kan man visa att

$$y_4 = \frac{x_2 + \sqrt{\left(x_2^2 + 4\right)}}{2}.$$

Vi har slutligen att $x_1 + x_2 = -1$, ty summan av x_1 och x_2 är lika med summan av alla rötterna. På motsvarande sätt som man visade att $y_1 \cdot y_2 = -1$, kan man visa att $x_1 \cdot x_2 = -4$. Detta medför att x_1 och x_2 är rötter till ekvationen $x^2 + x - 4 = 0$.

Eftersom $x_1 > x_2$ så är

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \text{ och } x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}.$$

Om vi nu sätter in dessa uttryck i formlerna för y_1 resp. y_4 och sedan sätter in de nya uttryck vi nu får i formeln för z_1 så får vi

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) =$$

$$= \frac{\dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}\right) + 4}}{2}\right)^2 - \dfrac{4\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)^2 + 4}\right)}{2}}}{2}$$

Detta är ett uttryck som bara består av rationella uttryck och kvadratrötter. Senare (avsnitt 3.2) kommer att visas att det är just detta som gör det möjligt att konstruera detta uttryck med hjälp av passare och (ograderad) linjal.

2.4.2 Att konstruera en regelbunden 17-hörning

Det finns flera olika sätt att konstruera en regelbunden 17-hörning. Nedan beskrivs den metod som finns i Felix Kleins bok *Famous problems of elementary geometry*.

Studera först uttrycket $2\cos(2\pi/17)$ =………. på föregående denna sida.

Där är

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \qquad y_1 = \frac{x_1 + \sqrt{\left(x_1^2+4\right)}}{2},$$

$$y_4 = \frac{x_2 + \sqrt{\left(x_2^2+4\right)}}{2} \quad \text{och} \quad z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{y_1 + \sqrt{\left(y_1^2 - 4y_4\right)}}{2}.$$

Innan vi går vidare måste först förklaras hur man på ett enkelt sätt kan konstruera rötterna till en andragradsekvation. Antag att x_1 och x_2 är två reella rötter till en andragradsekvation

$$x^2 - px + q = 0.$$

Låt c vara en cirkel som beskrivs av ekvationen

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y(y-2) = 0.$$

Drag den räta linjen $y = 2$. Vi kallar hädanefter denna linje för L. Punkten (0,2) kommer att kallas A och origo betecknas O. På L avsätts, med utgångspunkt i A, en sträcka åt höger med längden $4/p$. På x-axeln avsätts, med utgångspunkt i O, en sträcka åt höger med längden q/p. Sedan dras en rät linje som går genom $4/p$ och q/p. Denna linje skär c i två punkter. Slutligen dras med utgångspunkt i A en rät linje genom vardera av dessa skärningspunkter. Dessa båda räta linjer skär x-axeln i x_1 resp. x_2, vilka är de sökta rötterna. Beviset för att denna metod stämmer är följande:

Linje 1 har ekvationen

$$2x + x_1(y-2) = 0,$$

och linje 2 har ekvationen

$$2x + x_2(y-2) = 0.$$

Om vi multiplicerar vänsterleden i dessa båda ekvationer med varandra så får vi ekvationen

$$x^2 + \frac{x_1+x_2}{2}x\left(y-2\right) + \frac{x_1x_2}{4}\left(y-2\right)^2 = 0.$$

Om vi subtraherar cirkelns ekvation från denna ekvation, så får vi

$$\frac{x_1+x_2}{2}x\left(y-2\right) + \frac{x_1x_2}{4}\left(y-2\right)^2 - y\left(y-2\right) = 0.$$

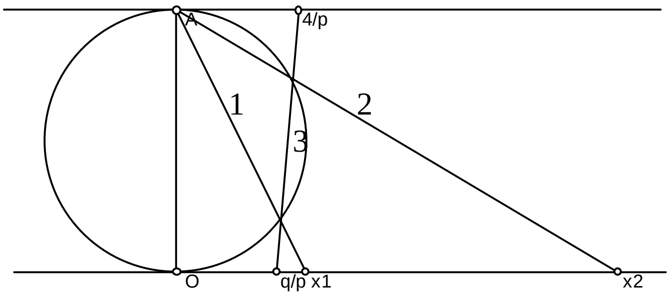
Detta är ekvationen för ett kägelsnitt som passerar genom cirkelns skärningspunkter med linje 1 och 2. Om vi dividerar bort faktorn $y - 2$, så får vi

$$\frac{x_1 + x_2}{2} x + \frac{x_1 x_2}{4}(y-2) - y = 0,$$

vilket är ekvationen för linje 3. Om vi nu sätter $x_1 + x_2 = p$ och $x_1 \cdot x_2 = q$, så får vi

$$\frac{p}{2} x + \frac{q}{4}(y-2) - y = 0\,,$$

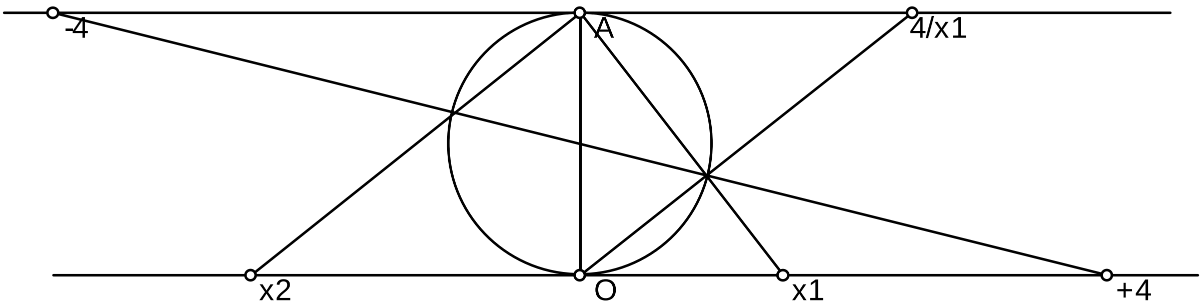
Om vi sätter $y = 2$ i denna ekvation så får vi att $x = 4/p$ och om vi sätter $y = 0$ så får vi $x = q/p$. Därmed är konstruktionens riktighet bevisad.



Nu till själva konstruktionen av 17-hörningen. Vi börjar med att konstruera x_1 och x_2 ur ekvationen

$$x^2 + x - 4 = 0$$

genom att använda den ovan beskrivna tekniken; först avsätts $4/p$, d v s –4, på L samt q/p, d v s 4, på x-axeln. Sedan dras en rät linje som går genom –4 och 4. Denna linje skär c i två punkter. Vi drar nu med utgångspunkt i A en rät linje genom vardera av dessa skärningspunkter. Dessa båda linjer skär x-axeln i x_1 resp. x_2, vilka är de sökta rötterna.



Nu skall y_1 konstrueras ur ekvationen

$$y^2 - x_1 y - 1 = 0.$$

Drag en rät linje som går genom O och skärningspunkten mellan linjen Ax_1 och c. Denna skär L i $4/x_1$, vilket inses på följande sätt:

Linjen Ax_1 har ekvationen

$$y = \frac{-2}{x_1}x + 2$$

Vi kombinerar denna ekvation med c:s ekvation och får att koordinaten för skärningspunkten är

$$\left(\frac{4x_1}{x_1^2+4}, \frac{2x_1^2}{x_1^2+4}\right).$$

Linjen genom O och denna punkt får därför ekvationen

$$y = \frac{2x_1^2}{4x_1}x = \frac{x_1}{2}x.$$

Sätt $y = 2$ och man får $x = 4/x_1$.

Drag en rät linje som går genom (-4,2) och (1,0). Denna linje skär y-axeln i (0,2/5). Drag också en rät linje som går genom $4/x_1$ och (0,2/5). Vi kallar denna linje för M. M skär x-axeln i $-1/x_1$, vilket inses på följande sätt:

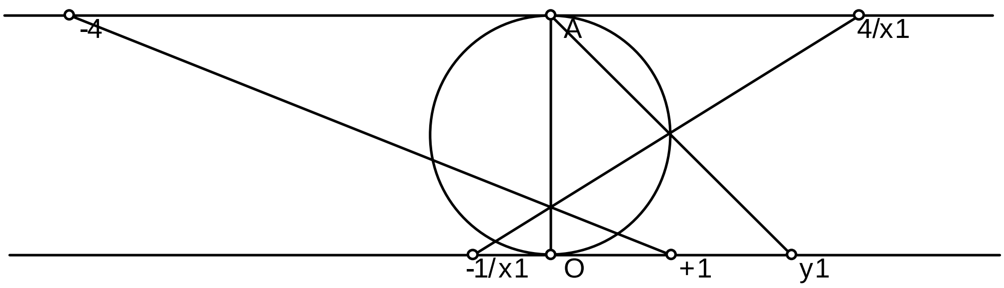
M:s ekvation är

$$y = \frac{8x_1}{20}x + \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5y - 2x_1 x = 2.$$

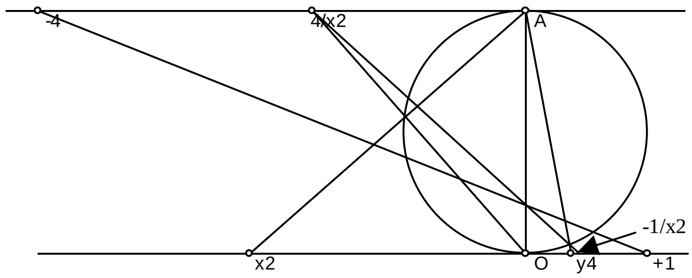
Sätt $y = 0$ och vi får

$$-2x_1 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{-1}{x_1}.$$

Denna sökta roten y_1 (positiva) fås nu genom att dra en rät linje som går genom A och den övre skärningspunkten mellan M och c. Denna nya linje skär x–axeln i y_1 (se bild nedan).



Vi konstruerar y_4 på motsvarande sätt som y_1. Konstruktionen visas i bilden nedan.



Det återstår nu att konstruera z_1 ur ekvationen

$$z^2 - y_1 z + y_4 = 0.$$

För att få $4/y_1$ gör vi som tidigare; vi drar en rät linje som går genom O och skärningspunkten mellan linjen Ay_1 och c. Denna skär L i $4/y_1$.

Drag nu en rät linje som går genom (4,2) och y_4. Drag sedan en rät linje som går genom $4/y_1$ och den förra linjens skärningspunkt med y-axeln. Vi kallar denna nya linjen för R. R skär x-axeln i y_4/y_1, vilket inses på följande sätt:

Linjen genom (4,2) och y_4 har ekvationen

$$(y_4 - 4)y + 2x = 2y_4.$$

Sätt $x = 0$ och vi får

$$y = \frac{2y_4}{y_4 - 4}.$$

Linjens skärningspunkt med y–axeln har alltså koordinaterna

$$\left(0,\ \frac{2y_4}{y_4 - 4}\right).$$

Den räta linjen genom denna punkt och punkten $(4/y_1, 2)$ har ekvationen

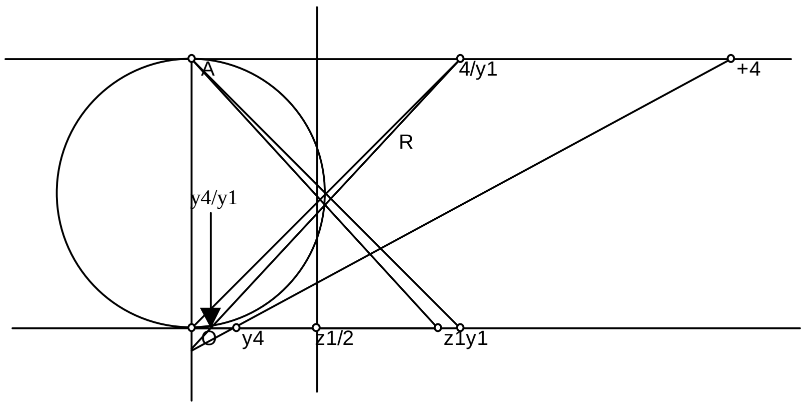
$$2y_1 x + (y_4 - 4)y = 2y_4.$$

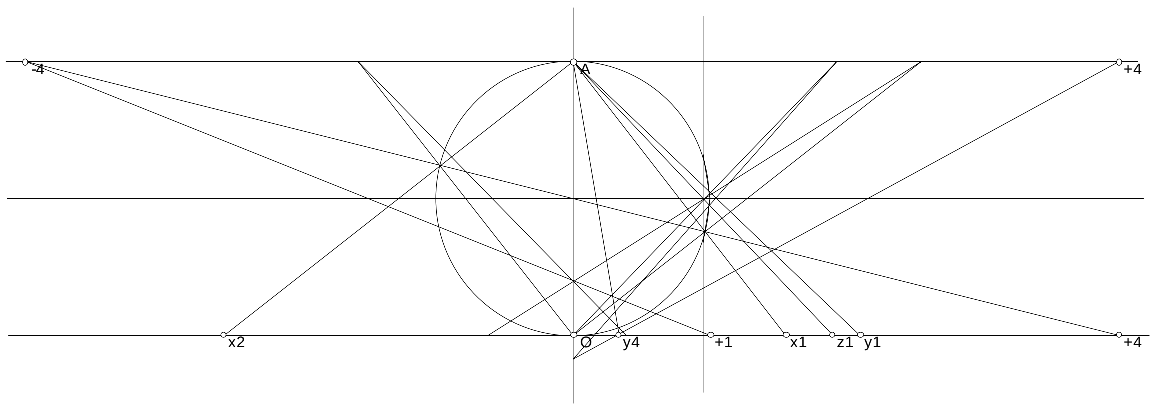
Sätt $y = 0$ och vi får $x = y_4/y_1$.

Drag nu en rät linje som går genom A och skärningspunkten mellan c och R. Denna linje skär x-axeln i

$$z_1 = 2\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right).$$

Vi vill nu ha cos($2\pi/17$) och delar därför sträckan Oz_1 på mitten. Drag sedan en rät linje, parallell med y-axeln, genom denna mittpunkt. Denna nya linje, vars avstånd till cirkelns medelpunkt (0, 1) är cos($2\pi/17$), skär c i två punkter. Dessa båda punkter bildar tillsammans med punkten (1, 1) tre på varandra följande hörn i en regelbunden 17–hörning. (se bild nedan). Genom att sammanbinda dessa hörn med räta linjer fås två sidor i den regelbundna 17–hörningen. Övriga sidor fås genom att avsätta sträckor med denna längd runt om i cirkeln. Konstruktionen är därmed klar.





Konstruktionen i sin helhet.

Som intressant kuriosa kan nämnas att J. F. Richelot genomförde konstruktionen av 257-hörningen på 194 trycksidor medan Professor Hermes ägnade 10 år av sitt liv åt 65 537–hörningen. Hans konstruktion finns samlad i en kista på universitetet i Göttingen, men det är osannolikt att någon någonsin orkat läsa den.

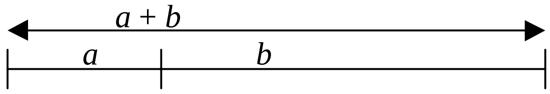
Som tidigare nämnts så visade Gauss vilka regelbundna månghörningar som generellt kan konstrueras med passare och linjal. Detta behandlar han i sitt största verk, *Disquisitiones Aritmeticae* (aritmetiska undersökningar). I denna uppsats (avsnitt 3) kommer dock detta problem att behandlas på ett lite mer lättöverskådligt sätt, nämligen med hjälp av abstrakt algebra.

3 Konstruerbara månghörningar – det generella fallet

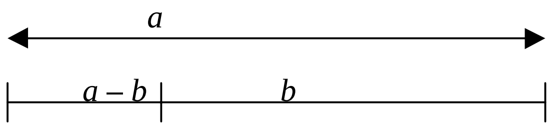
3.1 Konstruerbara tal

Utgående från en enhetssträcka 1 kallas ett reellt positivt tal a konstruerbart, om det är möjligt att med passare och ograderad linjal i ett ändligt antal steg konstruera en sträcka med längden a. Vi gör också konventionen att $-a$ är konstruerbart om a är konstruerbart.
Om a och b är konstruerbara så är också (i) $a + b$, (ii) $a - b$, (iii) ab, (iv) a/b och (v) $\sqrt{a}$ kontruerbara enligt:

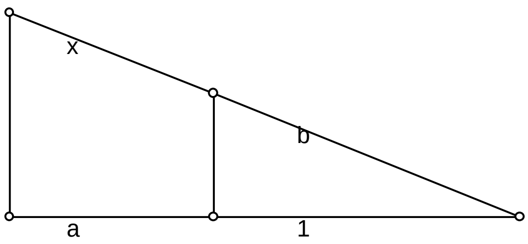
(i)



(ii)

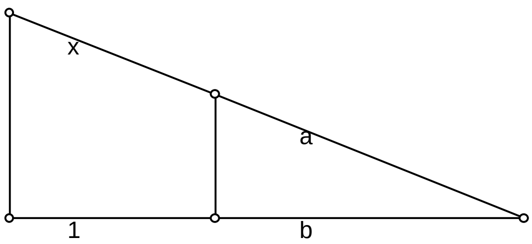


(iii)



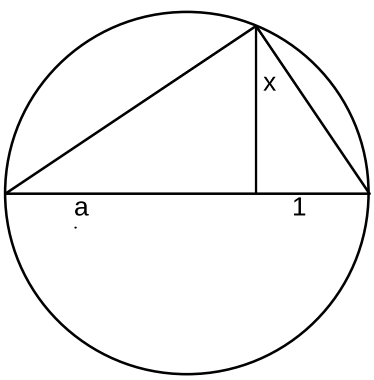
$a/x = 1/b \Rightarrow x = a \cdot b$

(iv)



$1/x = b/a \Rightarrow x = a/b$

(v)



$1/x = x/a \Rightarrow x = \sqrt{a}$

3.2 Några viktiga begrepp från den abstrakta algebran

Den abstrakta algebran växte fram under 1800-talet. Dess innehåll är mer avancerat än den ”vanliga” algebrans och i detta avsnitt beskrivs ett antal begrepp som är viktiga för att man ska kunna förstå vilka regelbundna månghörningar som kan konstrueras.

En *grupp* $(G,*)$ är en icke tom mängd G med en kompositionsregel $*$ på G så att följande uppfylls:

i. $*$ är associativ d v s för varje a, b och c i G gäller: $(a*b)*c = a*(b*c)$.

ii. G innehåller ett neutralt element e d v s $a*e = e*a = a$ för alla a i G.

iii. Varje a i G har en invers a^{-1} sådan att $a*a^{-1} = a^{-1}*a = e$.

Om dessutom $a*b = b*a$ för alla a och b i G så kallas gruppen *abelsk*.

En *kropp* K är en icke tom mängd med två kompositionsregler betecknade addition (+) och multiplikation (·) där dessutom följande gäller:
$(K,+)$ och $(K\backslash\{0\},\cdot)$ är abelska grupper och multiplikation är distributiv över addition d v s
$a\cdot(b + c) = a\cdot b + a\cdot c$ och $(a + b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$ där a, b och c tillhör K.

Q (mängden av rationella tal) utgör en kropp, ty $(\mathbf{Q},+)$ och $(\mathbf{Q},\backslash\{0\},\cdot)$ är abelska grupper och multiplikation är distributiv över addition i **Q**. Vi betraktar nu denna kropp och inför ett koordinatsystem. Varje rationellt tal kan konstrueras (enligt tidigare) och därmed kan varje punkt med rationella koordinater konstrueras. Med passare och linjal är det nu möjligt att utföra ytterligare konstruktioner:

1. Skärningspunkten mellan en rät linje, bestämd av två punkter i **Q**, och en cirkel, vars medelpunkt har rationella koordinater och vars radie är ett rationellt tal.
2. Skärningspunkten mellan två cirklar vars medelpunkter har rationella koordinater och vars radier är ett rationella tal.

Genom att utföra någon av konstruktionerna 1. el 2., så får vi en skärningspunkt vars koordinater antingen är rationella tal eller tal som innehåller kvadratrötter av ickekvadratiska rationella tal (vi betecknar en sådan kvadratrot med $\sqrt{a_1}$). Om det senare är fallet så har vi fått en ny mängd konstruerbara tal. Denna mängd betecknas

$$K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1}) = \{x + y\sqrt{a_1} \mid x, y \in \mathbf{Q}\}.$$

Efter en del räkning visas att K_1 är en kropp, ty $(K_1,+)$ och $(K_1,\backslash\{0\},\cdot)$ är abelska grupper och multiplikation är distributiv över addition i K_1. Vi säger att **Q** utvidgats till K_1 genom att till **Q** *adjungera* $\sqrt{a_1}$. Man säger att K_1 är en *överkropp* till **Q** och att **Q** är en *underkropp* till K_1.

På samma sätt kan vi utföra en ny konstruktion enligt 1. eller 2. och eventuellt erhålla en ny kropp $K_1(\sqrt{a_2}) = K_2$ o s v ända tills $K_n = K_{n-1}(\sqrt{a_n})$.

Slutsatsen blir att kroppen K av konstruerbara tal erhålls ur **Q** genom upprepad adjungering av positiva kvadratrötter. Detta kan formuleras på följande sätt:

Om $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är positiva tal och $\mathbf{Q}, K_1, K_2, \ldots, K_n$ är en följd av kroppar sådana att

$K_1 = \mathbf{Q}(\sqrt{a_1})$, …., $K_n = K_{n-1}(\sqrt{a_n})$ där $a_j \in K_j$ och $\sqrt{a_j} \notin K_j$ så kan varje tal i K_n konstrueras utgående från grundkroppen **Q**.

Låt nu K vara en kropp och a ett element i en överkropp till K. Låt k_o, k_1,…,k_n vara element i K. Då kallas *a algebraiskt* över K om 0 kan skrivas som ett polynom

$$k_0 + k_1 a + k_2 a^2 + \ldots\ldots + k_n a^n,$$

där minst en koefficient är skild från 0. Exempelvis är √2 algebraiskt över **Q** ty √2 är nollställe till $X^2 - 2$.

Om a är algebraiskt över K så kallas ett polynom p med minimal grad (≥ 1) och med a som nollställe, för ett *minimalpolynom* för a över K. Exempelvis är $X - \sqrt{2}$ minimalpolynom för √2 över **R** (= mängden reella tal) men $X^2 - 2$ är minimalpolynom för √2 över **Q**. Man kan visa att minimalpolynomet för a över K är entydigt bestämt så när som på en konstant faktor ≠ 0. Om minimalpolynomet för a över K har grad n så säger man att a är algebraiskt av grad n över K. Minimalpolynomet är alltid *irreducibelt*, d v s det kan inte skrivas som en produkt av två polynom som båda har lägre grad än polynomet självt.

Varje utvidgning F av K kan betraktas som ett *vektorrum* över K. Elementen i F kallas vektorer medan elementen i K kallas skalärer. Vektorerna e_1, e_2,……, e_n säges utgöra en *bas* för F om varje vektor f i F kan skrivas på ett och endast ett sätt som en linjärkombination av e_1, e_2,……, e_n, d v s om f entydigt kan skrivas

$$f = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots.. + a_n e_n.$$

Exempelvis är 1 och √2 en bas för **Q**(√2) ty alla element i denna kropp kan på ett och endast ett sätt skrivas $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2}$. Vi säger att **Q**(√2) har *dimensionen* 2 (dimension = antalet basvektorer). Allmänt gäller att om a är algebraiskt av grad n över K, så är 1, a, …., a^{n-1} en bas för $K(a)$ betraktat som vektorrum över K.

Dimensionen för F över K betecknas $[F{:}K]$. Exempelvis är $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}){:}\mathbf{Q}] = 2$.

Följande sats visar sig vara betydelsefull i fortsättningen:

Om F är en ändlig utvidgning av L och L en ändlig utvidgning av K så är F en ändlig utvidgning av K och

$$[F{:}K] = [F{:}L]\cdot[L{:}K].$$

Satsen visas på följande sätt:
Låt u_1, u_2, …, u_r vara en bas för L över K och v_1, v_2, …,v_s en bas för F över L. Om vi kan visa att de $r \cdot s$ elementen $u_k v_i$ utgör en bas för F över K, så är satsen visad. Varje $x \in F$ kan skrivas

$$x = \sum_{i=1}^{s} x_i v_i, \text{ där } x_i \in L.$$

Eftersom u_1, u_2, …, u_r är en bas för L över K så är

$$x_i = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} u_k, \text{ där } a_{ik} \in K.$$

Alltså är

$$x = \sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r} a_{ik} u_k\right)v_i = \sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} a_{ik} u_k v_i.$$

Vi skall nu visa att dessa $r{\cdot}s$ element är linjärt oberoende över K. Antag att

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k v_i = 0, \text{ där } b_{ik} \in K.$$

Då är

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k\right)v_i = 0.$$

Nu gäller

$$\sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k \in L,$$

och eftersom $v_1, v_2, \ldots, v_s$ är linjärt oberoende över L så får vi

$$\sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k = 0 \text{ för varje } i.$$

Men $u_1, u_2, \ldots, u_r$ är linjärt oberoende över K, varför $b_{ik} = 0$ för varje k (för varje i). Alltså är de $r{\cdot}s$ elementen $u_k v_i$ linjärt oberoende över K och satsen är därmed visad.

Vi kan nu återgå till de konstruerbara talen.
Varje tal som kan konstrueras utgående från $\mathbf{Q}$ tillhör antingen $\mathbf{Q}$ eller en reell utvidgning $F = K_n$ sådan att

$$[K_1(=\mathbf{Q}(a_1)):\mathbf{Q}] = [K_1(a_2):K_1] = \ldots = [K_n(a_{n+1}):K_n] = 2.$$

Speciellt är $[F:\mathbf{Q}] = 2^n$.

Antag nu att ett tal β kan konstrueras. Då tillhör alltså β en kropp F av grad 2^n över $\mathbf{Q}$. Då är $\mathbf{Q}(\beta)$ en delkropp till F av grad m över $\mathbf{Q}$, där m är graden för β:s minimalpolynom (irreducibla polynom) över $\mathbf{Q}$. Av ovan följer att m är en faktor i 2^n d v s m är en potens av 2. Omvänt, om m inte är en potens av 2 så kan β ej konstrueras.

Utifrån detta kan vi dra följande centrala slutsats:

Ett tal β är konstruerbart om och endast om graden $[\mathbf{Q}(\beta):\mathbf{Q}]=2^k$.

Sedan komplexa tal införts kan konstruktionen av en regelbunden n-hörning behandlas med den binomiska ekvationen

$$z^n - 1 = 0.$$

Rötterna till denna ekvation brukar kallas de n:te enhetsrötterna och kan skrivas

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad , k = 0, 1, 2, \ldots, n\text{-}1.$$

Geometriskt sett så representerar dessa rötter i det komplexa planet var sitt hörn i en i enhetscirkeln inskriven regelbunden n-hörning. Vi kan nu omformulera vårt problem:

En regelbunden n-hörning kan konstrueras om vi kan uttrycka $\cos 2\pi/n$ med hjälp av ett ändligt antal operationer med rationella tal eller kvadratrötter.

Om man i den binomiska ekvationen $z^n - 1 = 0$ dividerar bort den triviala roten $z_0 = 1$ så erhålls den s. k. cirkeldelningsekvationen

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots.. + z + 1 = 0.$$

Avgörande för konstruerbarheten blir nu, utifrån vad som sagts innan, om lösningen av denna ekvation kan reduceras till lösningen av en serie ekvationer av första eller andra graden. Då kan nämligen uttrycket $\cos 2\pi/n$ skrivas om i form av ett uttryck som endast innehåller ett ändligt antal rationella tal och kvadratrötter.

3.3 Varför man ej kan konstruera en regelbunden 7- eller 9-hörning

Den regelbundna sjuhörningen.

Sätt

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \text{ och } x = z + \frac{1}{z}.$$

Vi får då $x = 2\cos(2\pi/7)$.

Studera nu ekvationen $z^7 - 1 = 0$.
Vi dividerar bort $z_0 = 1$ och erhåller ekvationen

(1) $$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$

Vi har

$$z^2 + 1/z^2 = (z + 1/z)^2 - 2 = x^2 - 2 \text{ och } z^3 + 1/z^3 = (z + 1/z)^3 - 3(z + 1/z) = x^3 - 3x.$$

Dividera nu (1) med z^3 och vi får

(2) $$z^3 + z^2 + z + 1 + 1/z + 1/z^2 + 1/z^3 = x^2 - 2 + x^3 - 3x + x + 1 = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Antag nu att ekvationen $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ har en rationell rot $x = r/s$ där sgd$[r,s] = 1$.
Vi får då

$$r^3/s^3 + r^2/s^2 - 2r/s - 1 = 0 \Leftrightarrow r^3 = s(s^2 + 2rs - r^2).$$

Vi har att s delar r^3 och r delar s^3. Men r och s var ju relativt prima så enda möjliga rationella rötterna är $x = \pm 1$. Ingen av dessa satisfierar (2) och därmed är ekvationen irreducibel över **Q**. Samtidigt är denna ekvation av grad 3 (som inte är en potens av 2) och enligt vad vi kommit fram till tidigare så kan därför ett nollställe β inte konstrueras, vilket också medför att en regelbunden sjuhörning inte kan konstrueras.

Den regelbundna niohörningen

Vi skall försöka konstruera $x = \cos 2\pi/9$.
Sätt $\alpha = 2\pi/9$. Då är $3\alpha = 2\pi/3$ och som bekant är $\cos 2\pi/3 = -1/2$.
Vi använder nu den trigonometriska formeln $\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

Vi får
(3) $$4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha + 1/2 = 0 \Rightarrow [x = \cos\alpha] \Rightarrow 8x^3 - 6x + 1 = 0.$$

Antag nu att denna ekvationen har en rot $x = r/s$ där sgd$[r,s] = 1$.
Vi har

$$8r^3/s^3 - 6r/s + 1 = 0 \Leftrightarrow 8r^3 - 6rs^2 + s^3 = 0.$$

Här ser vi att r delar s^3 och s delar $8r^3$. Men r och s är ju relativt prima så de enda möjliga rationella rötterna ± 1, $\pm 1/2$, $\pm 1/4$, $\pm 1/8$. Prövning visar att ingen av dessa löser ekvationen (3) och därmed saknar ekvationen rationella rötter, vilket medför att ekvationen är irreducibel över **Q**. Vidare är ekvationen av grad 3 och därför kan (av samma anledning som tidigare) ett nollställe β inte konstrueras. Alltså kan den regelbundna niohörningen inte konstrueras.

3.4 Vilka regelbundna månghörningar kan generellt konstrueras?

Innan vi går vidare kan vi konstatera att det räcker att undersöka vilka månghörningar med udda antal hörn som kan konstrueras. Om en regelbunden n–hörning (n udda) kan konstrueras så kan nämligen även en regelbunden $2n$-hörning konstrueras ty drar man mittpunktsnormaler till sidorna i en i cirkeln inskriven n–hörning så skär dessa cirkeln i n st. nya punkter. Tillsammans med de tidigare hörnen utgör dessa punkter hörn i en regelbunden $2n$–hörning.

Men inte nog med detta, vi kan dessutom inskränka oss till att undersöka vilka primtalsmånghörningar som kan konstrueras. Detta motiveras på följande sätt. Alla udda tal är antingen primtal eller sammansatta av primtal. Om ett udda tal n t ex är sammansatt av primtalen p_1 och p_2 (dvs. $n = p_1 \cdot p_2$, $p_1 \neq p_2$) så kan den regelbundna n–hörningen konstrueras under förutsättning att den regelbundna p_1- resp. p_2-hörningen kan konstrueras, ty enligt en algebraisk sats finns då två heltal r och s sådana att $rp_1 + sp_2 = 1$ och därmed följer

$$\frac{2\pi}{p_1 p_2} = \frac{2\pi r}{p_2} + \frac{2\pi s}{p_1},$$

vilket visar vårt påstående. Om däremot p_1-hörningen eller p_2– hörningen (eller båda) inte kan konstrueras så kan $p_1 \cdot p_2$–hörningen inte konstrueras ty $p_1 \cdot p_2$– hörningen ska ju gå genom både p_1-hörningens och p_2 –hörningens hörn. Exempelvis kan 21-hörningen inte konstrueras eftersom 7-hörningen inte kan konstrueras. Vi skall senare också visa att p^2-hörningen (p primtal) inte kan konstrueras, trots att p-hörningen kan konstrueras.

Vi har alltså dragit följande viktiga slutsats:
Vet vi vilka regelbundna primtalshörningar som kan konstrueras så vet vi också vilka regelbundna månghörningar som generellt kan konstrueras.

Följande irreducibilitetskriterium (Eisensteins kriterium), som vi inte bevisar, visar sig vara betydelsefullt i fortsättningen:

Heltalspolynomet

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

där

(i) *alla koefficienter a_k är delbara med primtalet p då $k < n$*
(ii) *a_n ej är delbar med p*
(iii) *a_o ej är delbar med p^2*

är irreducibelt över ***Q****.*

Med hjälp av detta kriterium kan vi nu visa att cirkeldelningspolynomet

$$F(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots.. + z + 1$$

är irreducibelt över **Q** för varje primtal n. Sätt nämligen $z = y + 1$ och $F(z)$ övergår i polynomet

$$F(y+1) = y^{p-1} + \binom{p}{1} y^{p-2} + \binom{p}{2} y^{p-3} + \ldots. + \binom{p}{p-2} y + \binom{p}{p-1}.$$

Detta polynom uppfyller villkoren i Eisensteins kriterium, ty alla talen $\binom{p}{k}$, $1 \leq k \leq p-2$ är delbara med p och konstanttermen är lika med p. Därför är $F(y + 1)$ irreducibelt över **Q**. Men då är även $F(z)$ irreducibelt över **Q** ty en faktorisering av $F(z)$ skulle innebära en faktorisering av $F(y + 1)$, men detta är omöjligt eftersom $F(y + 1)$ är irreducibelt.

Vi kan därmed konstatera att en regelbunden p-hörning kan konstrueras om och endast om $p - 1 = 2^k$, där k är ett heltal och p är ett primtal.

Dessutom gäller följande:

$p = 2^k + 1$ är inte ett primtal om k är delbart med ett udda heltal $u > 1$, ty då är

$$p = 2^{cu} + 1 = a^u + 1,$$

där $a = 2^c$. Men om u är udda så är

$$a^u + 1 = (a + 1)(a^{u-1} - a^{u-2} + a^{u-3} -..+.. - a + 1),$$

vilket medför att $a^u + 1$ är sammansatt om $u > 1$. Därför, om $p = 2^k + 1$ skall vara ett primtal, så kan inte k ha några udda primtalsfaktorer och måste därför vara av en potens av 2, d v s $k = 2^s$ och vi får $p = 2^k + 1$, där $k = 2^s$. Ett sådant primtal kallas *fermatskt*.

Om n är kvadraten på ett udda primtal p så är talet $\cos 2\pi/n + i\sin 2\pi/n$ nollställe till polynomet

$$G(x) = \frac{x^{p^2} - 1}{x^p - 1}. \tag{4}$$

Sätt nu $x = y + 1$. Då fås

$$G(y) = \frac{(y+1)^{p^2} - 1}{(y+1)^p - 1} = \frac{y^{p^2} + pf(y)}{y^p + pg(y)} = y^{p^2 - p} + F(y),\ \text{där}$$

$F(y)$, $f(y)$ och $g(y)$ är heltalspolynom. Man kan då skriva

$$y^p F(y) = p\left[f(y) - g(y)y^{p^2-p} - g(y)F(y)\right].$$

Alltså är alla koefficienter i $F(y)$ delbara med p. Som på sid. 27 inses att konstanttermen i $F(y)$ är lika med p. Då säger Eisensteins kriterium att $G(y)$ är irreducibelt över $\mathbf{Q}$. Då är även polynomet (4) irreducibelt över $\mathbf{Q}$ ty en faktorisering av $G(x)$ skulle innebära en faktorisering av $G(y)$, men detta är ju omöjligt eftersom $G(y)$ är irreducibelt.

Därmed kan polynomet (1) ej framställas med kvadratrötter ty detta polynom är av graden $p^2 - p$, vilket ej är en potens av 2.

Alltså kan t ex den regelbunden 9–hörningen ej konstrueras trots att 3–hörningen kan konstrueras. Däremot kan, enligt tidigare, en regelbunden $p_1 \cdot p_2$–hörning konstrueras under förutsättning att p_1 och p_2 är olika *fermatska* primtal.

Det allmänna resultatet kan nu formuleras:

En regelbunden n-hörning kan konstrueras med passare och linjal, om och endast om $n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ...$, *där* $k = 0, 1, 2,...$ *och* $p_1, p_2,...$ *är olika primtal på formen* $p = 2^{2^m} + 1$ (*fermatska primtal*).

De *fermatska primtalen* har fått namn efter den franske juristen och matematikern Pierre de Fermat (1602 – 1665). Fermat förmodade att alla tal på denna form är primtal. För m större än 4 har man hittills inte funnit några primtal, vilket medför att de hittills kända *fermatska primtalen* är 3, 5, 17, 257 och 65 537. Exempelvis är $2^{32} + 1 = 4\ 294\ 967\ 297$ delbart med 641.

3.5 Konstruerbara/icke konstruerbara regelbundna månghörningar, från triangeln till 18-hörningen

Nedan följer en lista över vilka regelbundna månghörningar, från triangeln till 18-hörningen, som är konstruerbara respektive inte konstruerbara med passare och linjal. Dessutom förklaras, utifrån vad som sagts tidigare, varför de är konstruerbara resp. icke konstruerbara.

regelbunden n-hörning:	
$n = 3$	konstruerbar (*Elementa* bok I, 1)
$n = 4$	konstruerbar (*Elementa* bok IV, 6)
$n = 5$	konstruerbar (*Elementa* bok IV, 11)
$n = 6$	konstruerbar (*Elementa* bok IV, 15)
$n = 7$	ej konstruerbar, ty 7 är ett primtal och $7 - 1 \neq 2^m$ där $m = 2^s$
$n = 8$	konstruerbar, ty $8 = 2\cdot\underline{4}$
$n = 9$	ej konstruerbar, ty 9 är kvadrat på ett udda primtal
$n = 10$	konstruerbar, ty $10 = 2\cdot\underline{5}$
$n = 11$	ej konstruerbar, ty 11 är ett primtal och $11 - 1 \neq 2^m$ där $m = 2^s$
$n = 12$	konstruerbar, ty $12 = 2^2\cdot\underline{3}$
$n = 13$	ej konstruerbar, ty 13 är ett primtal och $13 - 1 \neq 2^m$ där $m = 2^s$
$n = 14$	ej konstruerbar, ty $14 = 2\cdot\underline{7}$
$n = 15$	konstruerbar (*Elementa* bok IV, 16)
$n = 17$	konstruerbar, ty 17 är ett primtal och $17 - 1 = 2^4$
$n = 16$	konstruerbar, ty $16 = 2^2\cdot\underline{4}$
$n = 18$	ej konstruerbar, ty $18 = 2\cdot\underline{9}$

3.6 De klassiska problemens olösbarhet

Kubens fördubbling.

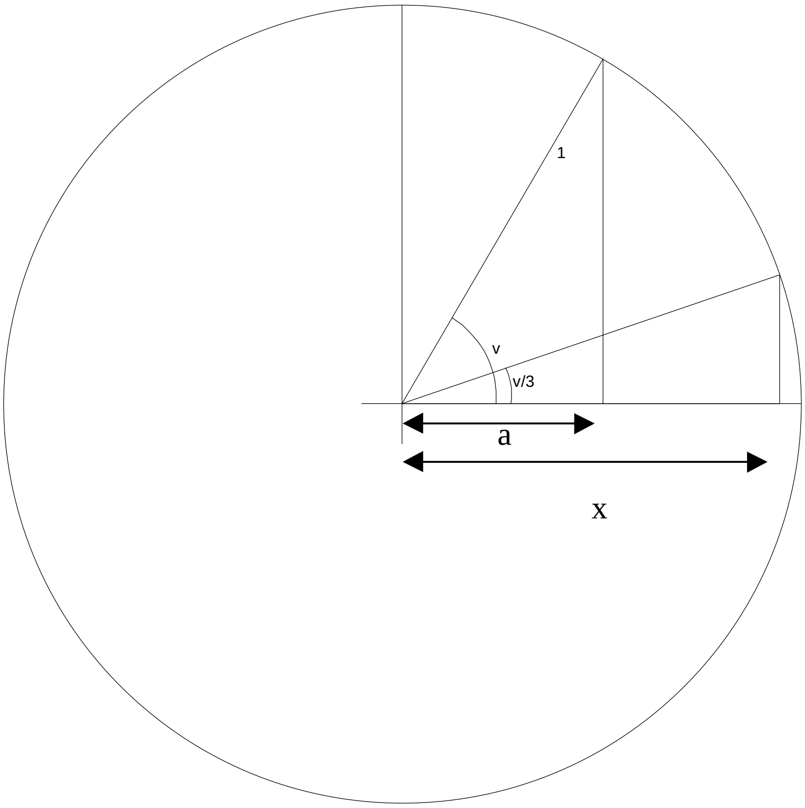
Om vi antar att kubens sida är 1 så består problemet i att konstruera en sträcka x, sådan att $x^3 = 2$, där x är rot till den algebraiska ekvationen $x^3 - 2 = 0$. Denna ekvation är av grad 3 samt irreducibel över $\mathbf{Q}$, vilket, enligt tidigare, medför att en rot α ej kan konstrueras. Alltså är det omöjligt att med passare och (ograderad) linjal konstruera en sida i en kub som har dubbelt så stor volym som den ursprungliga kuben.

Vinkelns tredelning.

För att förstå problemet med vinkelns tredelning, så utgår vi från en vinkel v som placeras i enhetscirkeln. Vi inför följande beteckningar:

$$a = \cos v \ \text{ och } \ x = \cos(v/3)$$

Här är a känd och vi söker x, ty kan vi konstruera x är problemet löst (se figur nedan).



Vi använder formeln

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

och får med hjälp av beteckningarna ovan och med $\alpha = v/3$

$$4x^3 - 3x - a = 0.$$

Detta är en tredjegradsekvation som är irreducibel över **Q**. Detta medför att en rot α ej kan konstrueras, d v s vinkelns tredelning är omöjlig att genomföra med passare och (ograderad) linjal. Man bör dock notera att vissa speciella vinklar är möjliga att tredela, t ex 90°. Sätter vi nämligen $a = \cos(\pi/2)$ så får vi den positiva roten $x = \sqrt{3}/2$, vilken kan konstrueras. Ett annat intressant fall får vi när vi sätter $a = \cos(2\pi/3)$. Då blir $x = \cos(2\pi/9)$ och vi har överfört problemet om vinkelns tredelning till problemet att konstruera en regelbunden niohörning (jfr. med avsnitt 3.3 där vi såg att detta problemet är olösbart).

Cirkelns kvadratur.

Om man utgår från enhetscirkeln så består problemet i att konstruera en sträcka x, sådan att $x^2 = \pi$, d v s konstruera $\sqrt{\pi}$. 1882 bevisade Frederick Lindeman att $\sqrt{\pi}$ är ett transcendent tal, d v s det kan inte erhållas som rot till en algebraisk ekvation med heltalskoefficienter. Man kan ännu mindre uttrycka $\sqrt{\pi}$ med rationella operationer och kvadratrötter, och därför inte heller kvadrera cirkeln, med hjälp av passare och linjal.

4 Källförteckning

Christoffersson, S. *Grupper, Ringar, Kroppar.* Lund: Liber Läromedel, 1975.

Courant, R & Herbert, R. *What is mathematics?* Oxford University Press, 1978.

Hall, T. *Gauss – Matematikernas konung*. Stockholm: Bokförlaget Prisma, 1965.

Heath, T. *A history of greek mathematics.* Oxford: Clarendon press, 1981.

Heath, T. *The thirteen books of Euklid´s Elements*. Cambridge University Press, 1956.

Klein, F. *Famous problems of elementary geometry.* Dover publications Inc, 1956.

Kokomoor, F W. *Populär matematik.* Halmstad: Meijels Bokindustri, 1948.

Nagell, T. *Lärobok i algebra*. Uppsala: Almqvist & Wiksell, 1957.

Thompson, J. *Historiens matematik*. Lund: Studentlitteratur 1991.

Tietze, H. *Famous problems of mathematics.* New York: Graylock Press, 1965.

Sammanfattning

Uppsatsen behandlar ett berömt matematiskt problem, nämligen strävan efter att finna vilka regelbundna månghörningar som är konstruerbara med enbart passare och linjal. Uppsatsen är indelad i två delar. Den första delen är en historisk tillbakablick. Denna sträcker sig från antikens greker, och deras upptäckter inom området, till den tyske matematikern Gauss. De gamla grekerna kände till konstruktionen av den regelbundna triangeln, kvadraten, femhörningen och femtonhörningen, samt de regelbundna månghörningar som fås då man ett godtyckligt antal gånger fördubblar sidoantalet hos dessa. Några av dessa konstruktioner finns i Euklides *Elementa* och ett särskilt avsnitt i denna uppsats ägnas åt detta storslagna verk. Trots sina stora ansträngningar kunde grekerna inte finna några fler konstruerbara månghörningar och det dröjde ända till slutet av 1700-talet innan någon ny upptäckt gjordes inom området. Det var tysken Gauss som slog dåtidens matematiker med häpnad då han 1796 lyckades konstruera en regelbunden sjuttonhörning. Men inte nog med detta, han lyckades också visa vilka månghörningar som generellt kan konstrueras med passare och linjal. Han kom fram till att en regelbunden n-hörning kan konstrueras endast då

$$n = 2^k \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot ...., \text{ där } p_1,\ p_2, ... \text{ är primtal på formen } p = 2^{2^m} + 1.$$

Den andra delen är mer teoretisk. Denna inleds med att definiera begreppet konstruerbara tal, samt vissa viktiga begrepp från den abstrakta algebran. Med hjälp av dessa begrepp visas varför en regelbunden sjuhörning eller niohörning ej kan konstrueras. Så småningom leds läsaren, med hjälp av några algebraiska satser, fram till uppsatsens kärna, nämligen vilka regelbundna månghörningar som generellt kan konstrueras med passare och linjal.

Slutligen visas lösningen på de två av de klassiska problemen, nämligen *kubens fördubbling* och *vinkelns tredelning*.

Inledning

Historien om de regelbundna konstruerbara månghörningarna (d v s konstruerbara månghörningar där alla vinklar och alla sidor är lika stora) sträcker sig över 2000 år bakåt i tiden. Intresset för dessa lär ha uppstått i det antika Grekland, där man inskränkte sig till att finna konstruktioner med hjälp av enbart passare och linjal. Detta matematiska område förenar geometri och algebra på ett intressant sätt och huvudsyftet med denna uppsats är att på ett så enkelt sätt som möjligt klargöra vilka regelbundna månghörningar som generellt är konstruerbara. För att förstå problemets bakgrund, så upptas en stor del av uppsatsen av en historisk tillbakablick. Speciellt ägnas ett längre avsnitt åt Euklides *Elementa*, eftersom detta verk innefattar de antika grekernas upptäckter inom området.

Gauss hade inte tillgång till den abstrakta algebran när han ”slog spiken i kistan” och gjorde en uttömlig utforskning av de regelbundna konstruerbara månghörningarna. Hans bevis kan te sig ganska svårgenomträngligt och behandlas inte i denna uppsats, men står att läsa om i hans livsverk *Disquisitiones Aritmeticae*. I denna uppsats har jag i stället valt att använda just den abstrakta algebran för att på ett mer lättöverskådligt sätt nå fram till det generella beviset. Jag är medveten om att en del av begreppen och satserna från den abstrakta algebran inte är helt okomplicerade, men jag har försökt att förklara dem på ett så enkelt sätt som möjligt, samt behandla dem i en för uppsatsen logisk ordning.

Uppsatsen behandlar också de tre klassiska problemen, nämligen kubens fördubbling vinkelns tredelning och cirkelns kvadratur. Dessa problem kanske kan tyckas falla utanför uppsatsens ram, men de är ändå intressanta ur både ett historiskt och ett vidare matematiskt perspektiv. Strävan efter att finna lösningen på de klassiska problemen kanske i sig kan te sig en aning banal, men tack vare matematikernas mödor inom detta område har en rad nya matematiska upptäckter gjorts. Dessutom finns en intressant koppling mellan de klassiska problemen och de regelbundna konstruerbara polygonerna. Antikens greker lär nämligen börjat undersöka vinkelns tredelning i hopp om att utifrån en liksidig triangel konstruera en regelbunden niohörning.