

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Detta material är skrivet för att användas på lärarutbildningen, särskilt avseende matematikinriktning mot de tidiga skolåren.

Materialet är UNDER ARBETE och är avsett som underlag för kollegiala diskussioner.

Jag har valt att inledningsvis behandla enbart addition och multiplikation med positiva heltal och positiva bråktalet, för att därefter diskutera division och subtraktion.

Särskilt det avslutande kapitlet Problemlösning avses att bli mer omfattande.

2006-06-02
Håkan Sollervall

Tal

och

de fyra räknesätten

Innehållsförteckning

1 Räkning med positiva heltal

Addition av positiva heltal
Några olika sätt att räkna addition
Uppdelning i termer
Subtraktion av positiva heltal
Några olika sätt att räkna subtraktion
Multiplikation av positiva heltal
Några olika sätt att räkna multiplikation
Faktorisering

2 Bråk och division

Begreppet bråk
Stambråk
Addition av bråk med lika nämnare
Jämförelse av bråk
Förlänga och förkorta
Addition av bråk med olika nämnare
Multiplikation av bråk
Division av positiva heltal
Några olika sätt att räkna division
Division av bråk med positivt heltal
Att dividera med ett stambråk
Att dividera med ett bråk

3 Decimaltal

Matematikhistoria: Talsymboler och talsystem
Tiosystemet och decimaltal
Avrundning och överslagsräkning
Signifikanta siffror och grundpotensform
Potenser och talbaser

4 Negativa tal och subtraktion

Negativa heltal och motsatta tal
Subtraktion kan skrivas som addition
Subtraktion och addition som omvända räknesätt
Addition och subtraktion av heltal
Multiplikation med negativ faktor

5 Likheter och olikheter

Likhetstecken
Talmängder
Olikheter

6 Problemlösning

Enkel procenträkning
Procenträkning
Enkel bråkräkning
Bråkräkning

KAPITEL 1

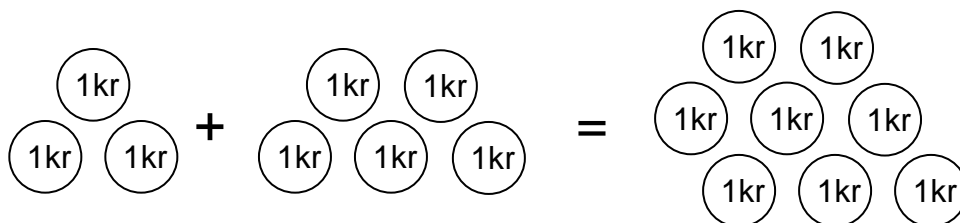
ADDITION OCH MULTIPLIKATION AV HELTAL

Addition av positiva heltal

Addition som sammanläggning

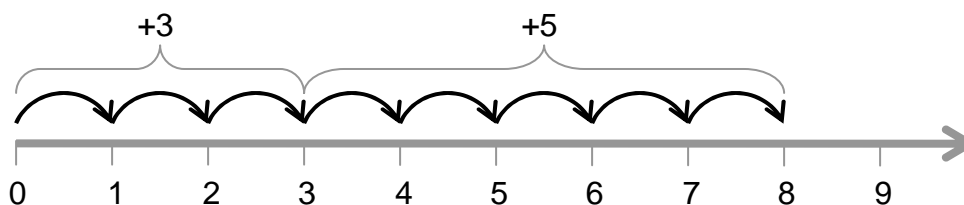
Addition är den matematik man ägnar sig mest åt i vardagen. Addition kan tolkas som att *lägga till* (med viss försiktighet, det blir inte alltid mer när man lägger till).

Exempel. Jag har 3 kr och lägger till ytterligare 5 kr. Då har jag $3 + 5 = 8$ kr.



Varje addition av positiva heltal kan illustreras genom att *lägga samman* två antal av samma sort, exempelvis "tre äpplen plus fem äpplen", "tre godisbitar plus fem godisbitar". Däremot är det inte självklart vad som menas med "tre pojkar plus fem flickor" eller "tre äpplen plus fem päron". Vardagstolkningen är uppenbar, vi kan ju "lägga samman" tre flickor och fem pojkar i ett bollhav och vi kan "lägga samman" tre äpplen och fem päron i en fruktskål, men när vi adderar i matematisk mening måste vi ha klart för oss vilken sort eller enhet som avses. Exempelvis kan vi räkna "tre barn plus fem barn" (som 8 barn) och "tre frukter plus fem frukter" (som 8 frukter). Additionen $3 + 5 = 8$ kan vi tolka som en allmängiltig regel som gäller vid antalsräkning avseende alla enheter.

Additionen $3 + 5 = 8$ kan även tolkas genom förflyttning på tallinjen.

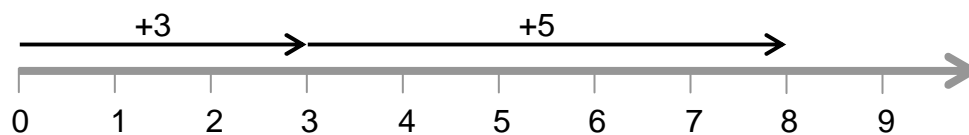


I bilden ovan tar vi "ett steg i taget" (jämför med att räkna på fingrarna).

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

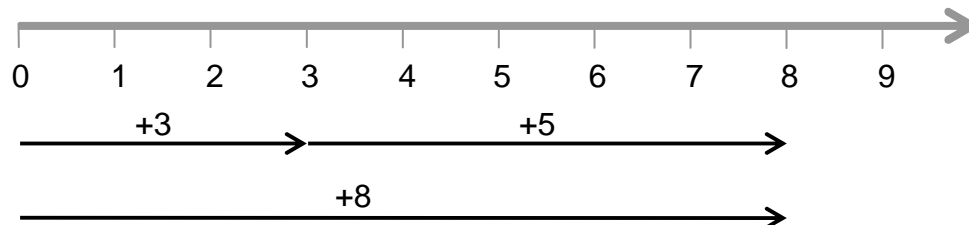
© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vi kan direkt ta ett 3-steg plus ett 5-steg, vilket vi kan visa i bild genom att först rita en 3-pil och efter den lägga till en 5-pil.



Addition kan tolkas på tallinjen genom att *talpilar* läggs efter varandra. Summan kan tolkas som (netto-)resultatet av en vandring på tallinjen, där termerna anger hur vi ska vandra (i exemplet ovan "först 3 steg, sedan 5 steg till").

Om vi börjar med 3 och lägger till 5 får vi alltså summan 8 och skriver $3 + 5 = 8$.



Summan 8 kan tolkas som en punkt på tallinjen eller som en egen talpil.

Two ways to represent positive integers on a number line.

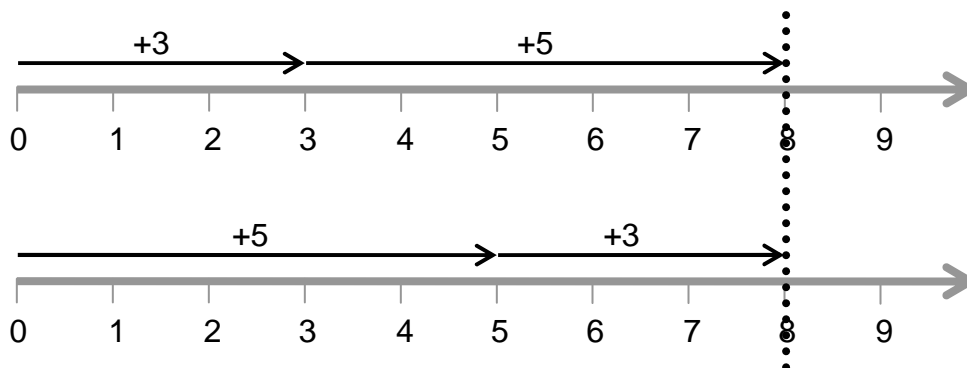
På tallinjen kan vi markera talen som punkter.

Vi kan även representera talen med talpilar.

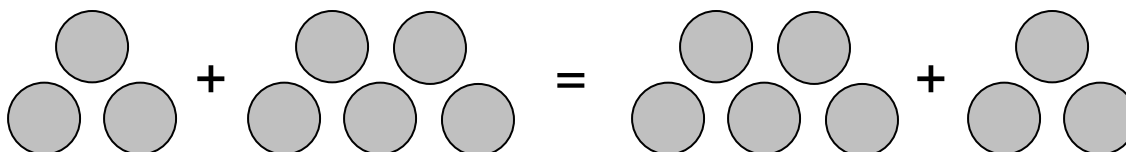
En fördel med talpilarna är att de är *dynamiska*. De inbjuder till en operationell tolkning av addition eftersom de kan flyttas i sidled och läggas efter varandra.

Kommutativa lagen

Om vi *kommuterar* termerna 3 och 5 i additionen $3 + 5 = 8$, dvs låter dem byta plats, så får vi samma summa: $5 + 3 = 8$.



Vi kan också tolka sammanläggningen $3 + 5 = 5 + 3$ med bilder:



Vi säger att addition är ett *kommutativt* räknesätt eftersom vi får samma resultat oavsett vilken term (av två givna) som vi utgår ifrån.

Kommutativa lagen: $a + b = b + a$

Exempel: $3 + 5 = 5 + 3$

Denna regel gäller för alla positiva heltal a och b .

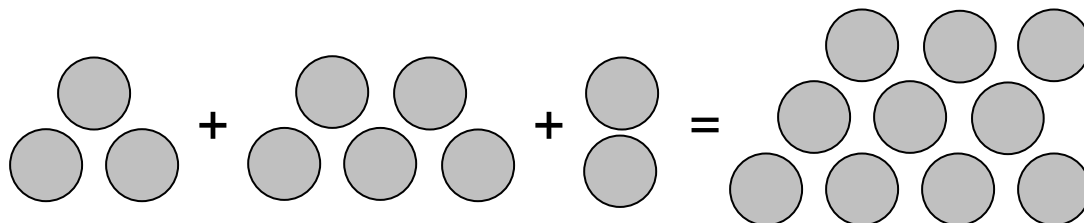
(Senare ska vi se att kommutativa lagen gäller vid addition av alla reella tal, att den även gäller för multiplikation, men att den *inte* gäller vare sig för subtraktion eller division.)

Särskilt vid huvudräkning kan det ibland (exempelvis när första termen är mycket mindre än andra termen) vara praktiskt att använda kommutativa lagen.

Exempel. $5 + 173 = 173 + 5 = 170 + 8 = 178$

Associativa lagen

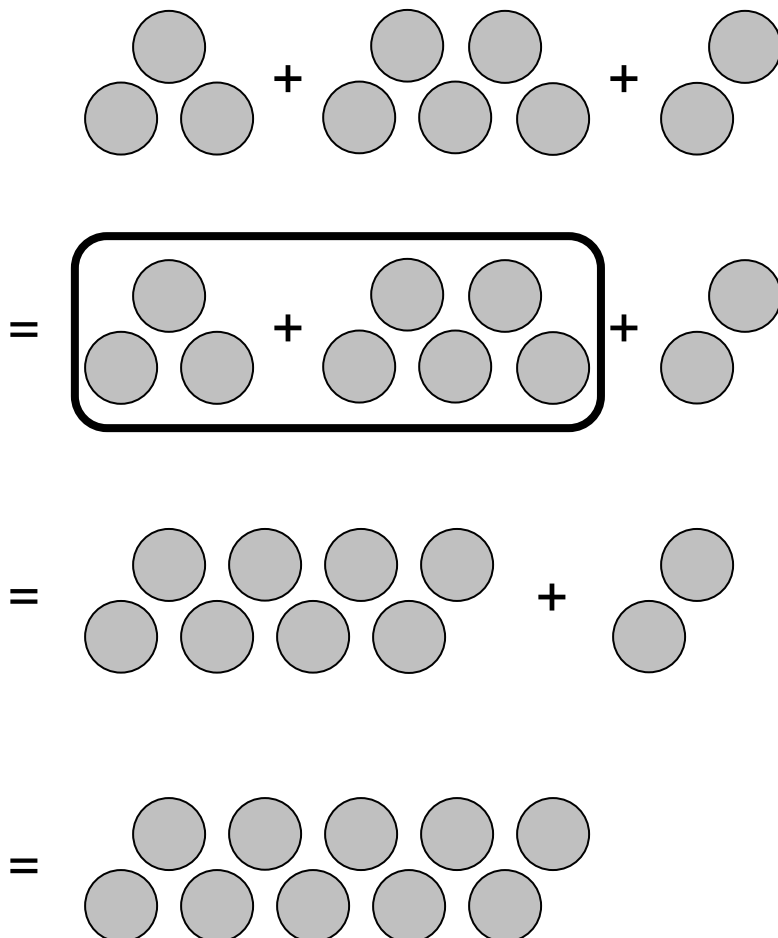
Hur räknar vi addition med fler än två termer? Även här utgår vi ifrån grundprincipen att addition handlar om att lägga samman. *Om* vi tolkar additionen $3 + 5 + 2$ som att *först* lägga samman tre och fem, *sedan* ytterligare två stycken så blir det totalt tio stycken: tre plus fem blir åtta och åtta plus två blir tio.



Att lägga samman enligt "tre plus fem blir åtta och åtta plus två blir tio" kan redovisas som

$$3 + 5 + 2 = (3 + 5) + 2 = 8 + 2 = 10$$

Vi kan även visa beräkningen med bilder, steg för steg:



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Lägg märke till att införande av parentes reducerar additionen av *tre* termer till *två* additioner med *två* termer vardera, dvs sådant vi har diskuterat tidigare.

Just detta att nya situationer hanteras enbart med hjälp av tidigare kunskap (och en rimlig överenskommelse, i detta fall att vi börjar med att addera de två första termerna) är något som särskilt kännetecknar matematiken. Vi behöver endast acceptera ett fåtal utgångspunkter/grundprinciper (såsom att addition handlar om sammanläggning) för att kunna hantera mer komplicerade situationer.

Ett uttryck som "3 + 5 + 2" blir meningsfullt först när det tolkas i förhållande till tidigare kunskap, i detta fall kunskap om addition av två termer.

Själva införandet av parentes bör dock redas ut. Är det fritt fram att börja med vilken som helst av de tre termerna, till den addera vilken som helst av de andra två och sedan addera den återstående?

Vi provar alla de (sex) möjligheter som finns att associera de tre termerna:

$$(3 + 5) + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$(3 + 2) + 5 = 5 + 5 = 10$$

$$(2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10$$

$$(2 + 5) + 3 = 7 + 3 = 10$$

$$(5 + 3) + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$(5 + 2) + 3 = 7 + 3 = 10$$

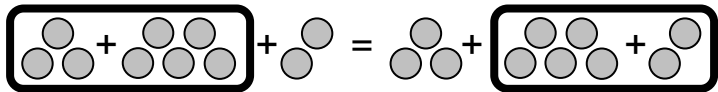
Vi ser att alla summorna blir lika (trots att mellanleden 8 + 2, 5 + 5 och 7 + 3 ser olika ut). Detta kan vi även inse genom att tolka *konkret* (jämför med föregående bild: när vi lägger samman tre "högar" får vi lika mycket, oavsett i vilken ordning vi lägger ihop högarna) eller på *tallinjen* (när vi lägger tre talpilar efter varandra kommer vi lika långt, oavsett i vilken ordning vi lägger pilarna).

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Eftersom vi får samma summa oavsett hur vi väljer att associera (sammanföra) tre givna termer säger vi att additionen är *associativ*.

Associativa lagen för addition: $(a + b) + c = a + (b + c)$
Exempel: $(3 + 5) + 2 = 3 + (5 + 2)$



Denna regel gäller för alla positiva heltal a , b och c .

(Senare ska vi se att associativa lagen gäller vid addition av alla reella tal, att det även finns en associativ lag för multiplikation, men *inte* vare sig för subtraktion eller division.)

Lägg märke till att formuleringen av associativa lagen endast tar upp två sätt att associera de tre termerna, jämfört med de sex sätten som vi tog upp i exemplet. Genom att kombinera associativa lagen med kommutativa lagen kan man få fram samtliga sex möjligheter att associera de tre termerna:

	Exempel:	
$\underline{\underline{(a + b) + c}}$	$\underline{\underline{(3 + 5) + 2}}$	(använd kommutativa lagen)
$= \underline{\underline{(b + a) + c}}$	$= \underline{\underline{(5 + 3) + 2}}$	(använd associativa lagen)
$= b + (a + c)$	$= 5 + (3 + 2)$	(använd kommutativa lagen)
$= \underline{\underline{(a + c) + b}}$	$= \underline{\underline{(3 + 2) + 5}}$	(använd kommutativa lagen)
$= \underline{\underline{(c + a) + b}}$	$= \underline{\underline{(2 + 3) + 5}}$	(använd kommutativa lagen)
$= b + (c + a)$	$= 5 + (2 + 3)$	(använd associativa lagen)
$= \underline{\underline{(b + c) + a}}$	$= \underline{\underline{(5 + 2) + 3}}$	(använd kommutativa lagen)
$= \underline{\underline{(c + b) + a}}$	$= \underline{\underline{(2 + 5) + 3}}$	

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

På motsvarande sätt går det att reda ut att addition av fyra, fem, sex eller ännu fler termer kan utföras i vilken ordning som helst.

Ett vanligt sätt att addera flera termer är att börja från vänster och addera en term i taget.

Exempel. $3 + 5 + 7 + 2 + 9 = 8 + 7 + 2 + 9 = 15 + 2 + 9 = 17 + 9 = 26$

Om man vill addera termerna i en annan ordning så är det fritt fram (enligt tidigare diskussion).

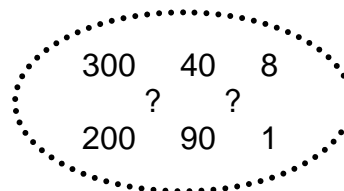
Exempel. $3 + 5 + 7 + 2 + 9 = (3 + 7) + 5 + (2 + 9) = 10 + 5 + 11 = 21 + 5 = 26$

Några olika sätt att räkna addition

Addition av flersiffriga heltal kan utföras på flera sätt. Gemensamt för alla dessa sätt är att det handlar om att välja en strategi för att lägga samman talens beståndsdelar.

$$348 + 291 = ?$$

Hur ska vi lägga samman talen?



Ett sätt är att räkna ental, tiotal, hundratal osv var för sig.

Exempel. $348 + 291 = 300 + 40 + 8 + 200 + 90 + 1$
 $= 500 + 130 + 9$
 $= 639$

Ett annat sätt är att utgå ifrån det första talet och lägga till det andra talets delar.

Exempel. $348 + 291 = 348 + 200 + 90 + 1$
 $= 548 + 90 + 1$
 $= 638 + 1$
 $= 639$

Ett tredje sätt är att skriva om talen så att additionen blir enklare. Vi kan få 300 istället för 291 om vi lägger till 9. Om vi gör detta måste vi samtidigt subtrahera 9 från 348, annars är ju inte uttrycken lika.

Exempel. $348 + 291 = (348 - 9) + (291 + 9)$
 $= 339 + 300$
 $= 639$

Om vi använder metoden ovan **vid addition** måste vi komma ihåg att **addera lika mycket** till den ena termen **som vi subtraherar** från den andra termen.

Alternativt kan vi bryta ut en term 9 ur den första termen 348 och flytta över till den andra termen 291, som ju går bra ihop med just 9.

Exempel. $348 + 291 = (339 + 9) + 291 = 339 + (9 + 291) = 339 + 300 = 639$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vi kan också räkna med uppställning. Det finns många olika, vi visar några.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 348 \\ + 291 \\ \hline 639 \end{array}$$

När vi adderar tiotalen får vi
 $4 + 9 = 13$ tiotal.
10 tiotal är 1 hundratal, som
markeras med minnessiffra.

Exempel. Vi behöver inte använda minnessiffra om vi räknar i flera steg.

$$\begin{array}{r} 348 \\ + 291 \\ \hline 9 \\ 130 \\ + 500 \\ \hline 639 \end{array}$$

Om vi vill räkna i annan ordning så går det bra (addition är ju kommutativ).

Exempel. Vi kan addera hundratalen före tiotalen före entalen (om vi vill).

$$\begin{array}{r} 348 \\ + 291 \\ \hline 500 \\ 130 \\ + 9 \\ \hline 639 \end{array}$$

Alla de tidigare beräkningarna kan utföras med eller utan uppställning. Jämför exempelvis det sista exemplet med det första i detta avsnitt (överst på föregående sida). Båda beräkningarna bygger på samma strategi/algorithm, nämligen att addera talsorterna var för sig. Skillnaden ligger i sättet att redovisa beräkningarna, tankesättet bakom är detsamma.

Uppdelning i termer

Vi har sett att det ibland kan vara lämpligt att dela upp ett tal i två termer. Nedan förenklar vi en addition genom att dela upp $348 = 339 + 9$.

Exempel. $348 + 291 = (339 + 9) + 291 = 339 + (9 + 291) = 339 + 300 = 639$

Vi väljer 9 som andra term i uppdelningen därför att 9 passar bra ihop med 291.

Uppdelning av ett tal i två termer kan göras på många sätt. Exempelvis känner du säkert igen begreppet *tiokamrater*.

$10 = 1 + 9$	1 och 9 är tiokamrater
$10 = 2 + 8$	2 är tiokamrat med 8
$10 = 3 + 7$	3 och 7 är tiokamrater
$10 = 4 + 6$	6 är 4:ans tiokamrat
$10 = 5 + 5$	5 är tiokamrat med sig själv
$10 = 6 + 4$	4 är 6:ans tiokamrat
$10 = 7 + 3$	3 är 7:ans tiokamrat
$10 = 8 + 2$	8 och 2 är tiokamrater
$10 = 9 + 1$	1 är 9:ans tiokamrat

Två tal är *tiokamrater* om deras summa är lika med tio.

(Det finns fler tiokamrater, faktiskt oändligt många, men ovanstående är alla som kan formuleras med två positiva heltal som termer.)

Precis som i exemplet ovan så kan god kännedom om tiokamrater underlätta vid huvudräkning med tiotalsövergång.

Exempel. $9 + 8 = 9 + (1 + 7) = (9 + 1) + 7 = 10 + 7 = 17$

Här lånar vi nians tiokamrat, dvs ettan, från andra termen åtta.

Subtraktion av positiva heltal

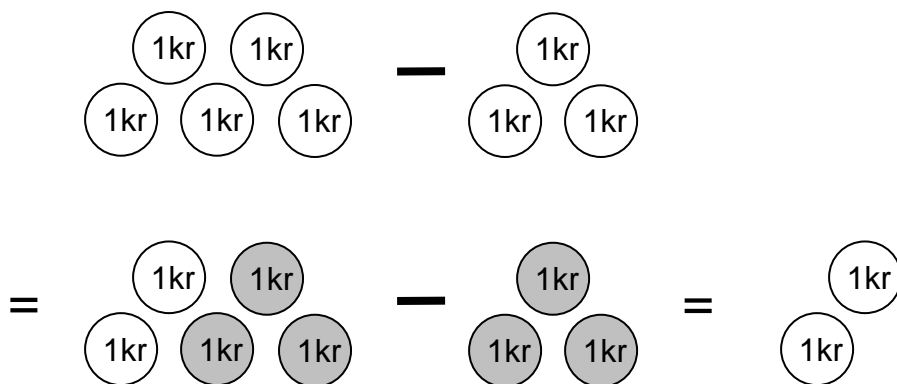
Addition innebär att lägga till. Subtraktion innebär att ta bort.

Exempel. Jag har 5 kr och handlar för 3 kr. Då har jag $5 - 3 = 2$ kr kvar.

Vi ska visa två sätt att resonera sig fram till detta svar.

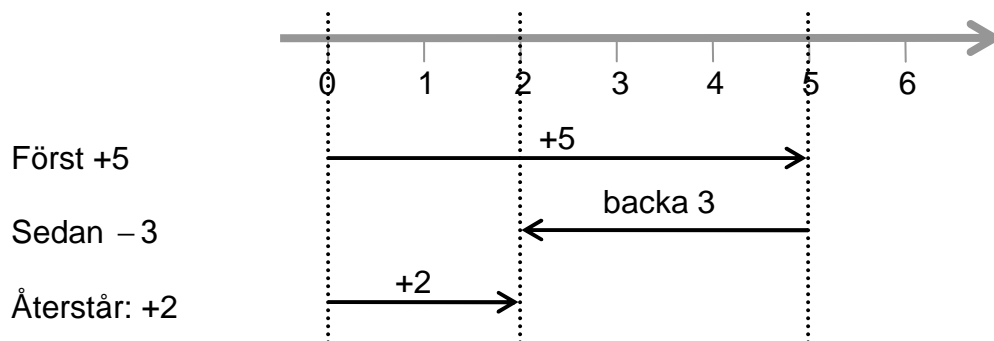
1. Borttagningsmetoden

Vi kan räkna ut $5 - 3 = 2$ genom att utgå ifrån 5 och *ta bort* 3.



Att ta bort 3 kan på tallinjen tolkas som att backa 3 steg, dvs att följa 3-pilen baklänges.

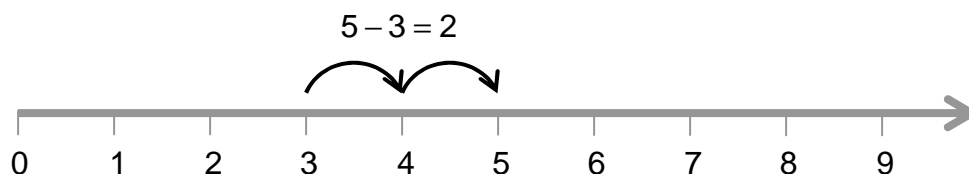
Illustration av $5 - 3 = 2$:



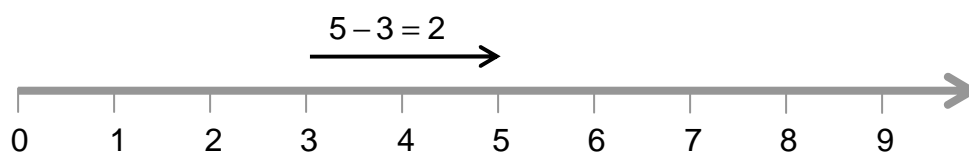
© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

2. Utfyllnadsmetoden

Vi kan räkna ut $5 - 3$ genom att utgå ifrån andra termen 3 och fylla ut (räkna upp) till första termen 5: Från 3 till 4 är det ett steg och från 4 till 5 är det ett steg. Alltså är det 2 steg från 3 till 5. Därmed är $5 - 3 = 2$.



Vi kan även visa subtraktionen med en talpil.



Man får själv välja vilken metod man vill använda när man beräknar en subtraktion. Ibland passar borttagningsmetoden bäst, ibland är det smidigare att använda utfyllnadsmetoden.

Exempel. Vi kan använda borttagningsmetoden för att beräkna

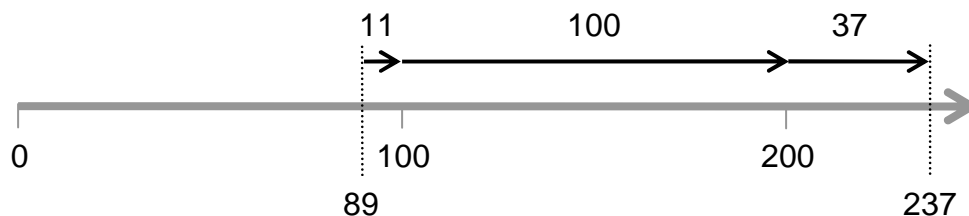
$$269 - 144 = 269 - 100 - 44 = 169 - 40 - 4 = 129 - 4 = 125$$

Kanske klarar du att direkt "se" svaret ($269 - 144 = 125$) men det kan ändå vara bra att träna på att skriva utförligt.

Exempel. Vi kan använda utfyllnadsmetoden för att beräkna

$$237 - 89 = 11 + 100 + 37 = 148$$

Förklaring: Från 89 till 100 är det 11, från 100 till 200 är det 100 och från 200 till 237 är det 37.

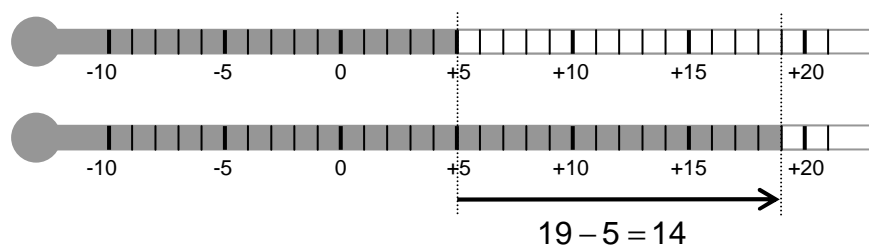


ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.
En termometer påminner på många sätt om en tallinje.

Exempel. En morgon i maj är det bara 5 grader varmt. Mitt på dagen har temperaturen höjts till 19 grader. Hur mycket har temperaturen höjts?

Temperaturdifferensen kan representeras med en talpil:



Temperaturen har alltså höjts $19 - 5 = 14$ grader.

Multiplikation av positiva heltal

Fem veckor, hur många dagar är det?

Eftersom varje vecka har 7 dagar är svaret naturligtvis

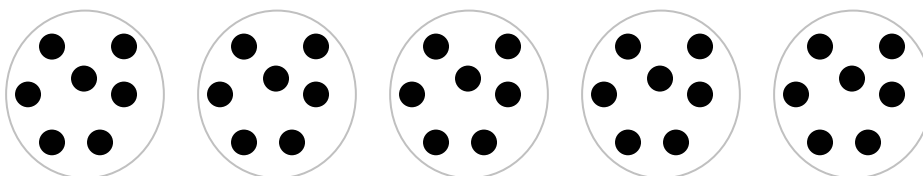
$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$$

Vi kan mer kortfattat uttrycka svaret som en multiplikation:

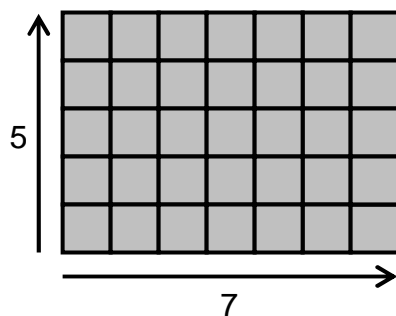
$$5 \cdot 7 = 35$$

Det finns många sätt att tolka produkten $5 \cdot 7 = 35$ med bilder. Vi visar tre sätt.

1. Om vi har 5 grupper med 7 i varje så har vi totalt $5 \cdot 7 = 35$ stycken.

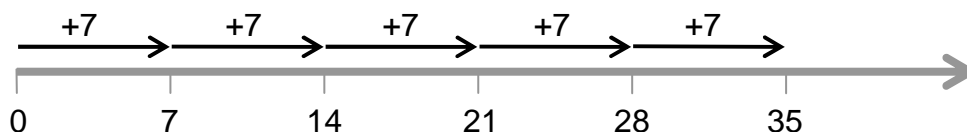


2. En chokladkaka som har 5 rader med 7 bitar i varje har totalt $5 \cdot 7 = 35$ bitar.



Lägg märke till att vi även kan tänka oss att chokladkakan består av 7 rader med 5 bitar i varje. Både $7 \cdot 5$ och $5 \cdot 7$ är alltså lika med 35.

3. Vi kan tolka $5 \cdot 7$ på tallinjen med 5 stycken 7-talpiler lagda efter varandra.



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.
Varje upprepad addition kan skrivas som en multiplikation.

Exempel. Uttryck med en multiplikation antalet dagar i 239 veckor.

Varje vecka innehåller 7 dagar. Antalet dagar i 239 veckor är då

$$7 + 7 + 7 + \dots + 7 = 239 \cdot 7$$

Alternativt kan man tänka sig att var och en av de 7 veckodagarna återkommer 239 gånger, vilket leder till uttrycket

$$239 + 239 + 239 + 239 + 239 + 239 + 239 = 7 \cdot 239$$

Lägg märke till att vi, precis som i föregående exempel med $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$, får samma resultat om vi byter plats på faktorerna:

$$239 \cdot 7 = 7 \cdot 239$$

Vi kan räkna ut produkten på följande sätt:

$$7 \cdot 239 = 7 \cdot (200 + 30 + 9) = 7 \cdot 200 + 7 \cdot 30 + 7 \cdot 9 = 1400 + 210 + 63 = 1673$$

När vi gör denna uträkning använder vi oss av det faktum att multiplikationen är *distributiv* (över addition), dvs multiplikation av ett tal med en summa kan skrivas som en summa av termer där talet multipliceras med varje term i summan.

För alla positiva heltal a , b och c gäller:

Kommutativa lagen: $a \cdot b = b \cdot a$

Distributiva lagen: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

(Senare ska vi se att båda dessa lagar faktiskt gäller för alla reella tal.)

Vi kan bekräfta att distributiva lagen även gäller med fler termer inuti parentesen:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c + d) &= a \cdot (b + (c + d)) \\ &= a \cdot b + a \cdot (c + d) \\ &= a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d \end{aligned}$$

Regeln är också rimlig om vi tolkar den i praktiken: 7 stycken tipsrader med 10 rätt som vardera ger 239 kr ger totalt $7 \cdot 200$ kr, $7 \cdot 30$ kr och $7 \cdot 9$ kr.

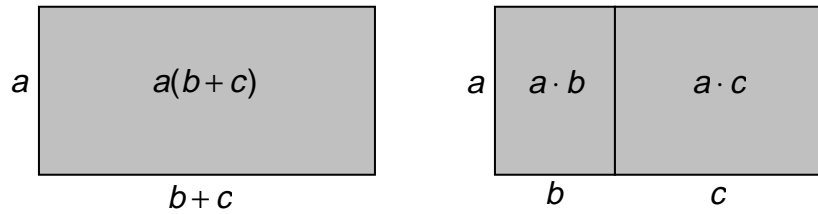
ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

När talen a , b och c alla är positiva, kan vi tolka distributiva lagen med bilder.

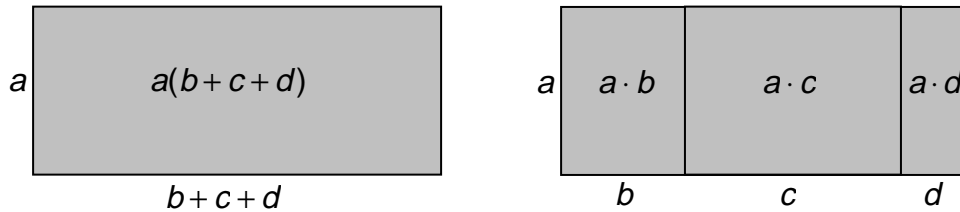
Arean av en rektangel är ju basen gånger höjden. I den högra bilden nedan har vi två mindre rektanglar med areorna $a \cdot b$ och $a \cdot c$. Sammanlagda arean är då $a \cdot b + a \cdot c$. I den vänstra bilden är arean $a \cdot (b + c)$. Areorna i båda bilderna är lika stora, dvs

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



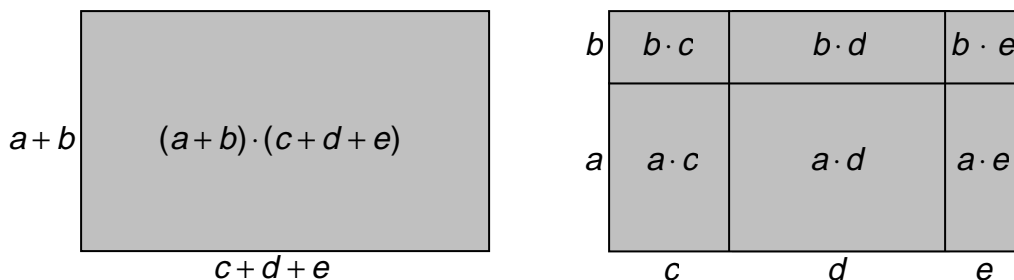
På motsvarande sätt kan vi tolka

$$a \cdot (b + c + d) = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d$$



Vi kan på samma sätt tolka följande regel, som uttrycker att vi kan multiplicera två summor genom att multiplicera varje term i första faktorn med varje term i andra faktorn och sedan addera produkterna:

$$(a + b) \cdot (c + d + e) = a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + b \cdot c + b \cdot d + b \cdot e$$



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vi har formulerat distributiva lagen $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ med en ensam faktor a till vänster om parentesen. Eftersom multiplikation är kommutativ, så att $a \cdot (b + c) = (b + c) \cdot a$, $a \cdot b = b \cdot a$ och $a \cdot c = c \cdot a$, så kan vi skriva om distributiva lagen med den ensamma faktorn till höger:

$$(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Vi bekantar oss med de distributiva lagarna

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ och } (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

genom att visa hur de kan användas för att beräkna produkten $239 \cdot 57$.

Exempel. $239 \cdot 57 = 239 \cdot (50 + 7)$

$$\begin{aligned} &= 239 \cdot 50 + 239 \cdot 7 \\ &= (200 + 30 + 9) \cdot 50 + (200 + 30 + 9) \cdot 7 \\ &= 200 \cdot 50 + 30 \cdot 50 + 9 \cdot 50 + 200 \cdot 7 + 30 \cdot 7 + 9 \cdot 7 \\ &= 10000 + 1500 + 450 + 1400 + 210 + 63 \\ &= 11950 + 1673 \\ &\quad (= 11900 + 1600 + 50 + 73 = 13500 + 123) \\ &= 13623 \end{aligned}$$

(Uttrycket som visas inom parentes är *ett* möjligt sätt att utföra additionen.)

Exempel. Alternativt kan vi beräkna produkten enligt (den tidigare nämnda) regeln att varje term i första faktorn multipliceras med varje term i andra faktorn:

$$\begin{aligned} 239 \cdot 57 &= (200 + 30 + 9) \cdot (50 + 7) \\ &= 200 \cdot 50 + 200 \cdot 7 + 30 \cdot 50 + 30 \cdot 7 + 9 \cdot 50 + 9 \cdot 7 \\ &= 10000 + 1400 + 1500 + 210 + 450 + 63 \\ &= 12900 + 723 \\ &= 13623 \end{aligned}$$

Några olika sätt att räkna multiplikation

Alla metoder för multiplikation bygger på att man kan (åtminstone) till och med 9:ans multiplikationstabell.

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Exempel. Med hjälp av tabellen kan vi beräkna $7 \cdot 500 = 3500$:

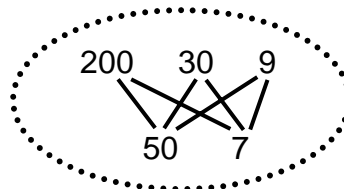
”Sju gånger fem hundra är lika med trettiofem hundra”

Vi kombinerar alltså tabellens $7 \cdot 5 = 35$ med kunskap om talens storleksordning.

För flersiffriga faktorer tillämpar vi regeln att varje term i första faktorn multipliceras med varje term i andra faktorn.

$$239 \cdot 57 = ?$$

”Alla multipliceras med alla”



I förra avsnittet inledde vi beräkningen så här:

$$\begin{aligned} 239 \cdot 57 &= (200 + 30 + 9) \cdot (50 + 7) \\ &= 200 \cdot 50 + 200 \cdot 7 + 30 \cdot 50 + 30 \cdot 7 + 9 \cdot 50 + 9 \cdot 7 \end{aligned}$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

När faktorerna är flersiffriga kan man organisera räkningarna med någon form av uppställning.

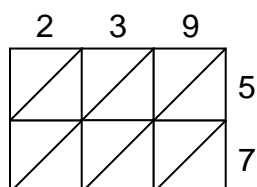
Vi ska visa två effektiva uppställningar för multiplikation. Den första kanske du känner igen medan den andra användes för flera hundra år sedan (därmed inte sagt att den skulle vara sämre!).

Exempel. "Traditionell" uppställning.

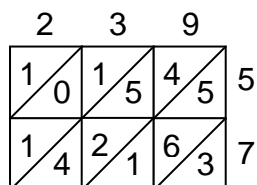
239		
· 57		
63	$7 \cdot 9$	
210	$7 \cdot 30$	
1400	$7 \cdot 200$	← Dessa uträkningar behöver inte skrivas ut.
450	$50 \cdot 9$	
1500	$50 \cdot 30$	
+ 10000	$50 \cdot 200$	
13623		

Exempel. Här ska vi använda en "gammal" uppställning, den så kallade *jalusi-metoden*. Vi visar hur den kan användas för att räkna ut $239 \cdot 57$.

Steg 1: Rita upp ett rutmönster med 3×2 rutor.



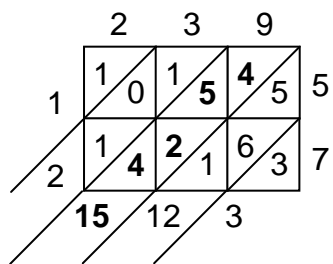
Steg 2: Multiplicera siffrorna som hör till varje ruta, skriv tiotalssiffran över det sneda strecket och skriv entalssiffran under.



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

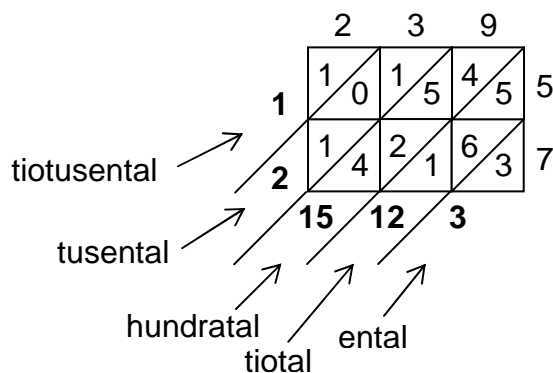
Steg 3: Addera talen diagonalt, exempelvis $4 + 5 + 2 + 4 = 15$.



Nu ska vi tolka resultatet. Vad betyder 15? Första termen 4 kan tolkas i relation till $9 \cdot 50 = 450$, dvs 4:an representerar 400. Andra termen 5 hör till $30 \cdot 50 = 1500$, dvs 5:an representerar 500.

Term	Tal i rutan	Multiplikation	Produkt	Termens värde
4	45	$9 \cdot 50$	450	400
5	15	$30 \cdot 50$	1500	500
2	21	$30 \cdot 7$	210	200
4	14	$200 \cdot 7$	1400	400

Alla talen 4, 5, 4, 2 på den aktuella diagonalen representerar alltså **hundratal**. Varje diagonal representerar en viss storleksordning.



Vi kan nu dra slutsatsen att

$$239 \cdot 57 = 10000 + 2000 + 1500 + 120 + 3 = 13623$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Jämför gärna jalusimetoden med den traditionella, som innehåller samma sex inledande multiplikationer. Skillnaden ligger i sättet att bokföra multiplikationerna.

$$\begin{array}{r} 239 \\ \cdot 57 \\ \hline 63 \\ 210 \\ 1400 \\ 450 \\ 1500 \\ + 10000 \\ \hline 13623 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 7 \cdot 9 \\ 7 \cdot 30 \\ 7 \cdot 200 \\ 50 \cdot 9 \\ 50 \cdot 30 \\ 50 \cdot 200 \end{array}$$

Vi avslutar detta avsnitt med ett lite speciellt exempel, som visar att det kan löna sig att tänka efter innan man multiplicerar ihop faktorer.

Exempel. Beräkna produkten $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.

Lösning 1. Vi räknar från vänster till höger.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 &= 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 24 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 120 \cdot 5 \cdot 7 = \\ &= 600 \cdot 7 = 4200 \end{aligned}$$

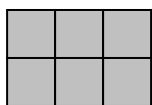
Lösning 2. Vi förenklar genom att sammanföra faktorer 2 och 5.

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 = 4200$$

Faktorisering och primtal

Eftersom $2 \cdot 3 = 6$ så är $6 = 2 \cdot 3$. Att skriva 6 som $2 \cdot 3$ kallas att *faktorisera* 6.

Faktorisering innebär alltså uppdelning i faktorer. Det finns andra faktoriseringar av 6, exempelvis $1 \cdot 6$ och $3 \cdot 2 \cdot 1$.



$$6 = 2 \cdot 3$$



$$6 = 1 \cdot 6$$

Om vi bara får välja faktorer bland de positiva heltalen, så kan talet 7 faktoriseras enbart som $1 \cdot 7$ och $7 \cdot 1$.



$$7 = 1 \cdot 7$$

För vissa av heltalen 2, 3, 4, ... gäller att varje faktorisering av talet i positiva heltal måste innehålla talet självt som en faktor. Ett sådant tal kallas *primtal*.

Talet 7 är därmed ett primtal, medan 6 inte är ett primtal. De minsta primtalen är 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (vilket är nästa?). Utifrån bilderna ovan skulle man kunna säga att primtalen är "avlånga tal".

En egenskap (som vi inte bevisar här!) hos heltalen 2, 3, 4, ... är att vart och ett av dessa tal antingen är ett primtal eller kan skrivas som en produkt av primtal.

Exempelvis kan vi skriva

$$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$$

Vi arbetar med faktoriseringar av denna typ främst för att stärka taluppfattningen och begreppet multiplikation, men också för att träna tolkning av matematiska definitioner (vilka tal är primtal och vilka är det inte, utifrån definitionen ovan?).

Vidare krävs ett visst mått av intellektuell aktivitet ("hjärngympa") för att klara ut faktoriseringar, det går inte bara att räkna utan kräver en hel del eftertanke.

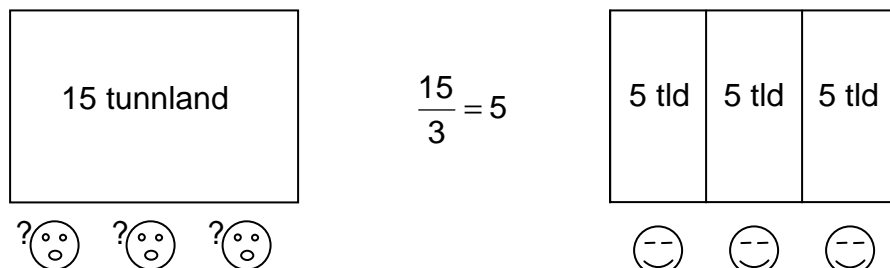
Senare ska vi se att det också finns en nära koppling mellan faktorisering och räknesättet division.

KAPITEL 2

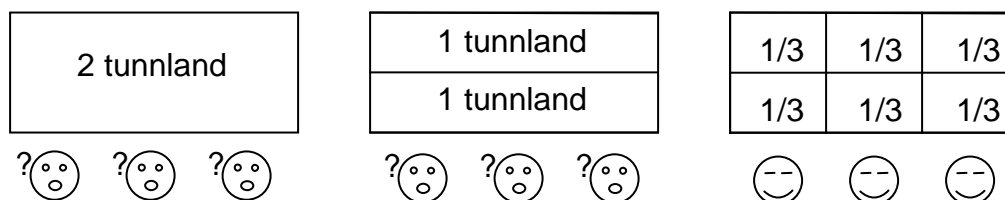
BRÅK OCH DIVISION

Begreppet bråk

Om ett markområde på 15 tunnland ska delas upp i 3 lika stora delar, så inser vi snabbt att det blir 5 tunnland i varje del.



Om ett mindre område på 2 tunnland ska delas i 3 lika stora delar, så kan vi inte lika enkelt reda ut hur mycket var och en ska få. Vi kan börja med att markera de båda tunnlanden. Sedan delar vi in varje tunnland i 3 lika stora delar. Dessa mindre delar kallar vi *tredjedelar*.



De tre lika stora delarna innehåller vardera två stycken tredjedelar, vilket kan skrivas antingen

som en summa, *en tredjedel plus en tredjedel* : $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$

eller som ett enda uttryck, *två tredjedelar* : $\frac{2}{3}$

En tredjedel av två tunnland är alltså två tredjedels tunnland. Det finns inget enklare sätt att uttrycka svaret.

I ovanstående resonemang är enheten (tunnland) viktig. Slutsatsen är ju att var och en ska få två tredjedels tunnland, inte två tredjedelar av vad som helst.

Uttrycket $\frac{2}{3}$ representerar här en *del av ett helt* tunnland.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

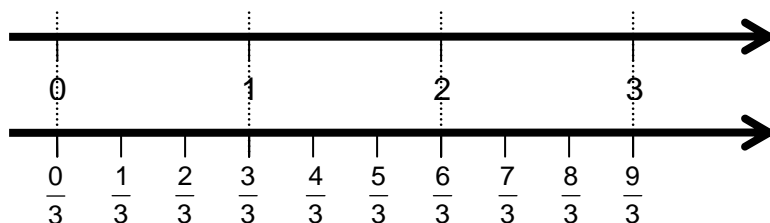
© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Hela uttrycket $\frac{2}{3}$ kallas *bråk*, 2 är bråkets *täljare* och 3 är bråkets *nämnare*.

$$\begin{array}{l} 2 \leftarrow \text{täljare} \\ \hline 3 \leftarrow \text{nämnare} \end{array} \quad \text{strecket mellan dem kallas } \textit{bråkstreck}$$

Ett bråk består av en täljare ("tak") och en nämnare ("nere"), som skiljs åt av ett bråkstreck. I ett bråk skall både täljare och nämnare vara heltal och nämnaren får dessutom inte vara lika med noll.

Bråket kan uppfattas som ett självständigt *tal* på tallinjen:



Lägg märke till att tre tredjedelar är lika mycket som en hel, sex tredjedelar är lika med två hela och nio tredjedelar är lika med tre hela:

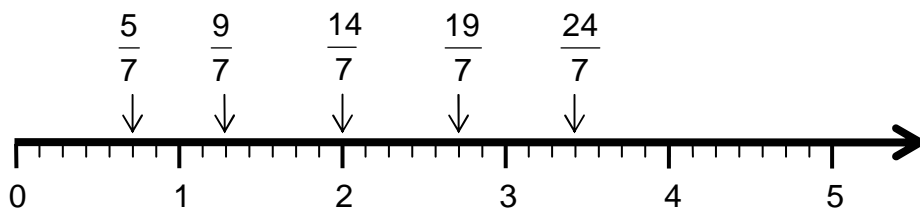
$$\frac{3}{3} = 1 \quad \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{9}{3} = 3$$

Varför är det så? Jo, vi säger att två tal är lika om de har samma position på tallinjen (samma "värde"). Därför gäller ovanstående likheter.

Tallinjens gradering kan anpassas efter bråkets nämnare.

Exempel. Nedan har vi graderat en tallinje i sjundedelar och markerat några bråk

med nämnaren 7. Vi kan lägga märke till att $\frac{14}{7} = 2$.



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Exempel. Vi diskuterar bråket $\frac{3}{4}$ både som del av en hel och som ett tal.

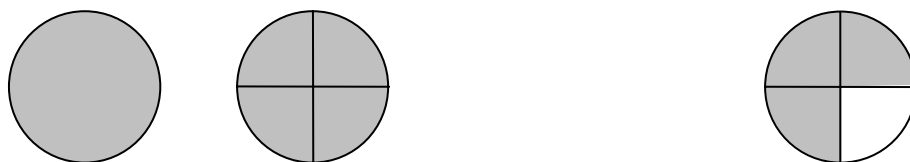
1) "En hel" kan vara vad som helst som helst som kan delas upp i fyra lika stora delar, t ex en rektangel. Tre fjärdedelar (av den hela) motsvarar då tre sådana delar.



$$1 = \frac{4}{4} \qquad \frac{3}{4}$$

1 hel = 4 fjärdedelar

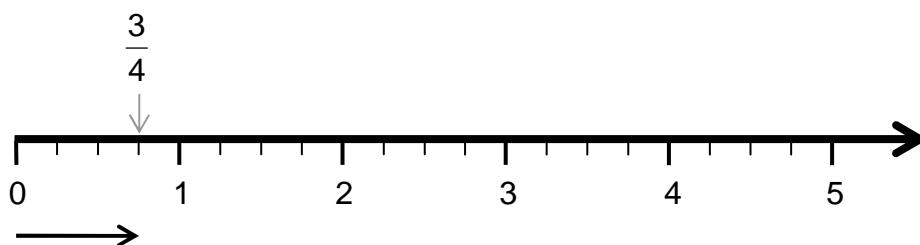
2) Om du skär ett äpple i fyra lika stora bitar och sätter ihop dem så har du motsvarande ett helt äpple). Tre sådana bitar utgör tre fjärdedels äpple.



$$1 = \frac{4}{4} \qquad \frac{3}{4}$$

1 hel = 4 fjärdedelar

3) Även tallinjen kan delas in i fjärdedelar, genom att utrymmet mellan två på varandra följande heltal delas in i fyra lika stora delar. Talet tre fjärdedelar har sin plats vid den tredje fjärdedelsmarkeringen till höger om nollan. Vi kan även representera talet med en talpil.



Stambråk

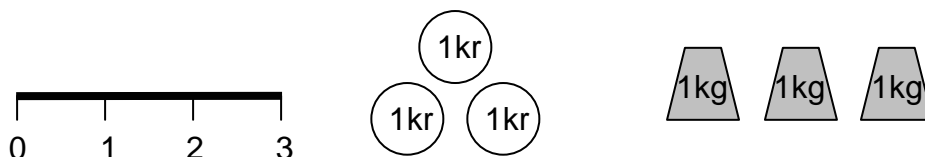
En storhet är produkten av ett tal och en enhet (mätetal och måttenhet).

Exempelvis är

$$3\text{ m} = 3 \cdot 1\text{ m}$$

$$3\text{ kr} = 3 \cdot 1\text{ kr}$$

$$3\text{ kg} = 3 \cdot 1\text{ kg}$$



Talet 3 framför enheten säger oss hur många vi har av enhetens storlek.

På motsvarande sätt kan vi tolka bråktal:

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{7} = 3 \cdot \frac{1}{7}$$

$$\frac{3}{10} = 3 \cdot \frac{1}{10}$$



Täljaren 3 anger antalet och nämnaren (4, 7 respektive 10) bestämmer storleken.

Analogin med andra storheter blir ännu tydligare när vi läser ut bråken:

tre fjärdedelar

tre sjundedelar

tre tiondelar

Vi kan då enklare jämföra med

tre meter

tre kronor

tre kilogram

Enligt samma princip som vi kan tänka oss att 3 m består av 3 st 1-metersbitar

($3\text{ m} = 3 \cdot 1\text{ m} = 1\text{ m} + 1\text{ m} + 1\text{ m}$) kan vi uppfatta $\frac{3}{4}$ som bestående av 3 st

fjärdedelar:

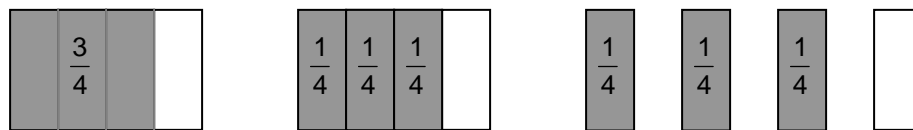
$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Den sista likheten följer ett känt mönster, multiplikation med ett positivt heltal kan alltid tolkas som en upprepad addition:

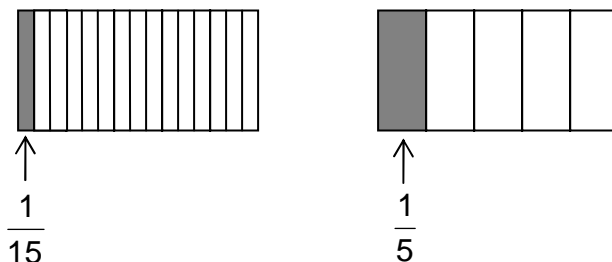
$$\text{jämför } 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{med } 3 \cdot 8 = 8 + 8 + 8 \quad \text{och } 3 \cdot x = x + x + x$$



$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Observera att ett **större** tal i nämnaren ger en mindre enhet.

Exempelvis är $\frac{1}{15}$ en mindre enhet än $\frac{1}{5}$, eftersom 15 är större än 5 (om man delar en hel i 15 delar blir ju delarna mindre än om man delar i 5 delar).



Stambråk

Bråk med en etta i täljaren kallas *stambråk*. Dessa är alltså av typen $\frac{1}{n}$, exempelvis är $\frac{1}{4}$ ett stambråk. Varje bråk kan skrivas som en produkt av ett positivt heltal och ett stambråk enligt

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \text{Exempel: } \frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

Addition av bråk med lika nämnare

Fem meter plus tre meter är åtta meter.

Fem kronor plus tre kronor är åtta kronor.

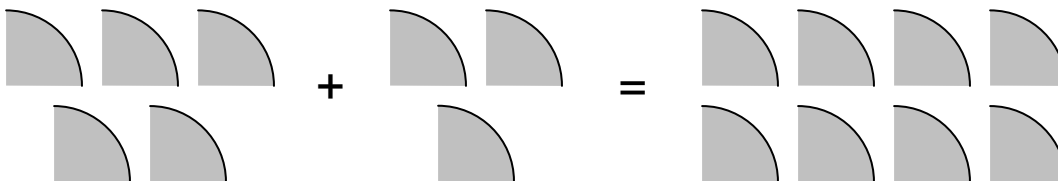
Femhundra kronor plus trehundra kronor är åttahundra kronor.

När termerna har samma enhet kan vi addera mätetalen och svara i den gemensamma enheten.

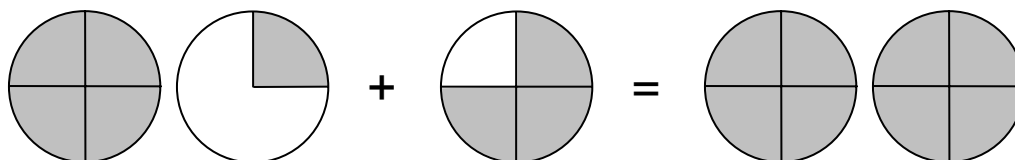
Exempel. På en förskola förbereds inför en fruktstund. Varje äpple skärs upp i fyra lika stora bitar. Barnen får äta så mycket de orkar. Lisa äter 5 bitar och Sven äter 3 bitar, dvs Lisa äter 5 fjärdedels äpple och Sven äter 3 fjärdedels äpple. Tillsammans äter de 8 fjärdedels äpple (vilket råkar motsvara precis 2 hela äpplen). I detta exempel är enheten "fjärdedels äpple".

Räkning med fjärdedelar fungerar som räkning med vilken enhet som helst. En skillnad är att det finns någon annan enhet (i exemplet "ett äpple") som man tar fjärdedelar av. Vi har då två naturliga enheter: "fjärdedels äpple" och "helt äpple".

1) 5 fjärdedelar plus 3 fjärdedelar visat i enheten "en fjärdedel" (fjärdedels äpple):



2) 5 fjärdedelar plus 3 fjärdedelar visat i enheten "en hel" (helt äpple):



Symboliskt kan vi skriva $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} (=2)$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

När båda termerna har samma nämnare så kan vi addera bråken genom att addera täljarna och behålla den gemensamma nämnaren.

Addition av bråk med samma nämnare: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$

Exempel: $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$

Denna regel gäller för alla positiva heltal a , b och c .

(Senare ska vi se att regeln gäller för alla reella tal, utom nämnaren 0.)

Att beräkna summan av två bråk med samma nämnare är lika enkelt som att beräkna summan av två positiva heltal. Om täljarna är 3 och 4 behöver vi bara beräkna summan $3 + 4 = 7$.

Exempel. $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{3+4}{5} = \frac{7}{5}$

3 femtedelar plus 4 femtedelar är lika med 7 femtedelar

Exempel. $\frac{3}{20} + \frac{4}{20} = \frac{3+4}{20} = \frac{7}{20}$

3 tjugondelar plus 4 tjugondelar är lika med 7 tjugondelar

Regeln gäller även för addition av flera bråk.

Exempel. $\frac{9}{10} + \frac{2}{10} + \frac{5}{10} = \frac{9+2+5}{10} = \frac{16}{10}$

Förlänga och förkorta

Vilket är mest, tre halva äpplen eller fem fjärdedels äpple?

Vi kan ganska snabbt reda ut frågeställningen med hjälp av bilder.



Vi ser direkt att $\frac{3}{2}$ (bilden till vänster) är mer än $\frac{5}{4}$ (bilden till höger).

Symboliskt kan vi reda ut detta genom att skriva om de tre halvorna som sex fjärdedelar:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} \text{ är mer än } \frac{5}{4}$$



I exemplet ovan passade det att göra om halvorna till fjärdedelar (eftersom det andra talet var uttryckt i enheten fjärdedelar). I andra situationer kan vi behöva omvandla till andra enheter. Exempelvis kan vi skriva

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10} \quad \text{eller} \quad \frac{5}{4} = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{10}{8}$$

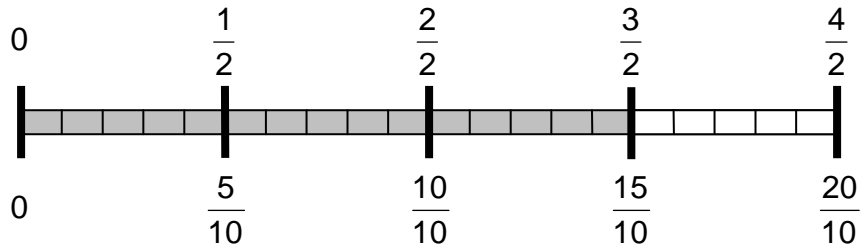


Varför får vi göra så? Jo, om vi (bilden till vänster) multiplicerar med 5 i nämnaren så får vi en **5 gånger mindre enhet**, tiondelar. Eftersom enheten är 5 gånger mindre måste vi ta **5 gånger så många delar**, 15 stycken istället för 3, för att få ett lika stort tal. Motsvarande gäller bilden till höger.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

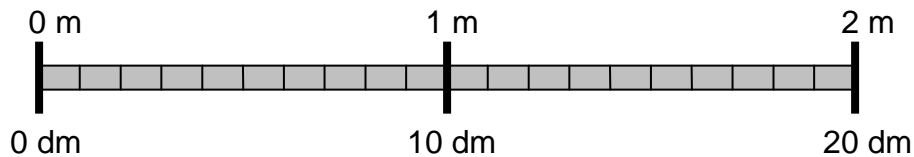
© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vi kan även tolka omskrivningen $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$ med följande bild.



Omskrivningen ovan kan jämföras med enhetsbytet när 2 m uttrycks som 20 dm.

När enheten blir **10 gånger mindre** (dm)
 så måste vi kompensera för detta genom att
 ta **10 gånger fler** delar (20 istället för 2).



Ibland gör vi tvärtom, dvs väljer den större enheten och skriver 20 dm = 2 m.

När enheten blir **10 gånger större** (m)
 så måste vi kompensera för detta genom att
 ta **10 gånger färre** delar (2 istället för 20).

Jämförelsevis gäller att en **3 gånger så stor** enhet kräver **3 gånger färre** delar.
 Exempelvis gäller det att

$$\frac{6}{15} = \frac{6/3}{15/3} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Omvänt: } \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{6}{15}$$

$$\frac{21}{30} = \frac{21/3}{30/3} = \frac{7}{10}$$

$$\text{Omvänt: } \frac{7}{10} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{21}{30}$$

Att (som till höger) multiplicera med samma tal i täljare och nämnare kallas att *förlänga* bråket. Att som i uträkningarna till vänster dividera med samma tal i täljare och nämnare kallas att *förkorta* bråket.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Förkortning behöver inte utföras genom division utan kan även utföras via faktorisering, där vi låter lika faktorer i täljare och nämnare ta ut varandra.

$$\frac{6}{15} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{2 \cdot \cancel{3}}{5 \cdot \cancel{3}} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{21}{30} = \frac{7 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{7 \cdot \cancel{3}}{10 \cdot \cancel{3}} = \frac{7}{10}$$

När täljare och nämnare inte har några gemensamma faktorer säger vi att bråket är skrivet i *enklaste form*:

$$\frac{2}{5} \text{ är enklaste formen av } \frac{6}{15}$$

$$\frac{7}{10} \text{ är enklaste formen av } \frac{21}{30}$$

Förlängning av bråk: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

Exempel: $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$

Förkortning av bråk: $\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$

Exempel: $\frac{15}{10} = \frac{15/5}{10/5} = \frac{3}{2}$

Dessa regler gäller för alla positiva heltal c .

Jämförelse av bråk

Förlängning kan, precis som i inledningen av förra avsnittet, användas som hjälpmedel vid jämförelse av två bråk.

Exempel. Vilket tal är störst, $\frac{7}{3}$ eller $\frac{27}{12}$?

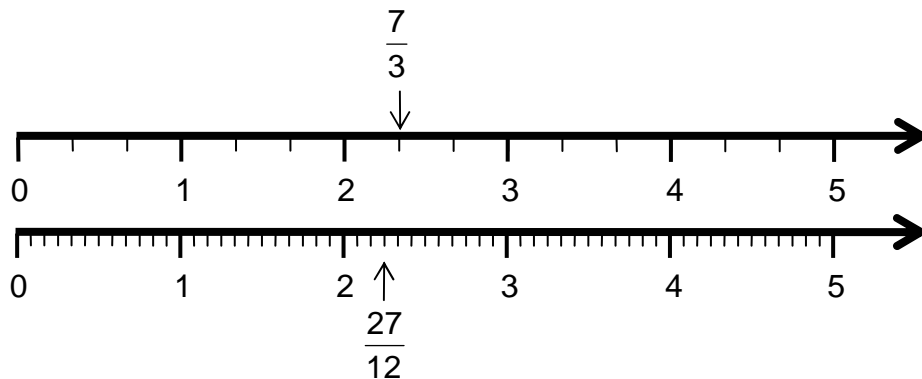
I detta fall kan vi omvandla tredjedelarna till tolfte delar genom att förlänga med 4:

$$\frac{7}{3} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{28}{12}$$

Eftersom $\frac{28}{12}$ är större än $\frac{27}{12}$, och $\frac{7}{3} = \frac{28}{12}$, så är $\frac{7}{3}$ större än $\frac{27}{12}$.

Vi kan bekräfta slutsatsen genom att jämföra talen på tallinje: Vi ser att $\frac{7}{3}$ ligger

till höger om $\frac{27}{12}$, alltså är $\frac{7}{3}$ större än $\frac{27}{12}$.



I exemplet ovan kunde vi omvandla tredjedelar till det andra talets enhet, tolfte delar. I nästa exempel söker vi en gemensam enhet för båda talen.

Exempel. Vilket tal är störst, $\frac{37}{15}$ eller $\frac{29}{12}$?

Vi börjar med att bestämma en gemensam enhet för femtondelar och tolfte delar.

Först skriver vi upp de heltalsnämnare som kan bli aktuella för de båda talen:

15: 15, 30, 45, 60, 75, ...

12: 12, 24, 36, 48, **60**, ...

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Talet 60, som är det minsta tal som finns i båda listorna, är den *minsta gemensamma multipeln* för 15 och 12. Vi har fått fram 60 på två sätt, dels som $15 \cdot 4$ och $12 \cdot 5$. Vi kan då skriva

$$\frac{37}{15} = \frac{37 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{148}{60} \quad \text{och} \quad \frac{29}{12} = \frac{29 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{145}{60}$$

Eftersom $\frac{148}{60}$ är större än $\frac{145}{60}$, så är $\frac{37}{15}$ större än $\frac{29}{12}$.

Ett annat sätt att komma fram till nämnaren 60 är att dela upp nämnarna 15 och 12 i faktorer. Vi kan skriva $15 = 3 \cdot 5$ och $12 = 3 \cdot 4$. Då ser vi att både 15 och 12 "ryms" (som faktorer) i produkten $3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$ (15 och 12 är faktorer i 60).

Talet 60 är *minsta gemensamma multipel* (MGM) för talen 15 och 12. Man kan skriva

$$\text{MGM}(15,12) = \text{MGM}(3 \cdot 5, 3 \cdot 4) = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$



behåll så få faktorer som möjligt, så att 15 och 12 ändå ryms i produkten

Exempel. $\text{MGM}(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5, 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 10 \cdot 10 \cdot 6 \cdot 7 = 4200$

Addition av bråk med olika nämnare

Vi börjar med tre exempel, som ska leda oss in mot det tankesätt vi behöver använda oss av när vi ska addera två bråk med olika nämnare.

1. Vad är 2 meter plus 3 meter?

Svar: 5 meter.

2. Vad är 2 meter plus 3 decimeter?

Svar: $2\text{m} + 3\text{dm} = 20\text{dm} + 3\text{dm} = 23\text{dm}$ (eller $2\text{m} + 0,3\text{m} = 2,3\text{m}$).

3. Vad är 2 Euro plus 3 kronor?

Här måste vi välja enhet. Kanske är det en amerikan som vill veta hur mycket han har i enheten USD. Om $1\text{€} = 1,2\text{USD}$ och $1\text{SEK} = 0,15\text{USD}$, så är

$$\begin{aligned} 2\text{€} + 3\text{SEK} &= 2 \cdot 1\text{€} + 3 \cdot 1\text{SEK} \\ &= 2 \cdot 1,2\text{USD} + 3 \cdot 0,15\text{USD} \\ &= 2,4\text{USD} + 0,45\text{USD} \\ &= 2,85\text{USD} \end{aligned}$$

Svar: 2,85 USD

Nu över till bråkräkningen.

Vi ska beräkna summan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

Uppgiften kan tolkas med bilder:

En hel: 

En halv: 

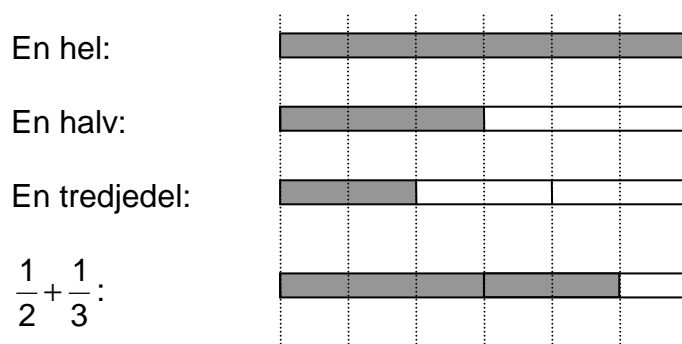
En tredjedel: 

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$: 

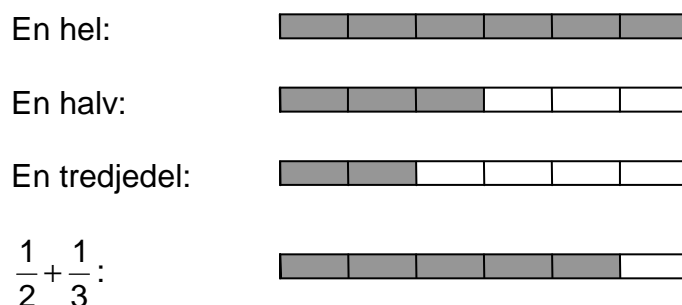
ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Ännu är det inte självklart hur vi ska uttrycka svaret i bråkform. Vi ritar in några linjer mellan bilderna, så att de kan jämföras med varandra.



I bilden ovan har vi delat in den hela i 6 delar. Den halva består av 3 sådana delar och tredjedelen består av 2 delar. Detta syns tydligare i bilden nedan.



Varje liten ruta motsvarar en sjättedel. Den nedersta bilden visar fem sjättedelar.

Alltså är

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Vi kan sammanfatta resonemanget så här:

Uppgiften är att addera en halv och en tredjedel

Halvan byts ut mot 3 sjättedelar

Tredjedelen byts ut mot 2 sjättedelar

Summan av 3 sjättedelar och 2 sjättedelar är 5 sjättedelar

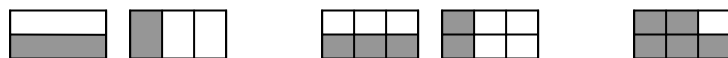
Vi kan genomföra additionen effektivt med en enda uträkning:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6}$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Ett annat sätt att visa uträkningen med bilder är att dela en rektangel på längden och på tvären i 2 respektive 3 delar, varefter rektangeln delas på båda sätten.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Addition av bråk med olika nämnare

Fem meter plus tre decimeter är naturligtvis **inte** lika med åtta meter. Enheterna meter och decimeter är ju olika och därför kan måttalen fem och tre inte adderas rakt av. Vi kan addera storheterna fem meter och tre decimeter genom att välja en *gemensam enhet*, exempelvis meter eller decimeter.

Lösning 1, enhet meter: $5 \text{ m} + 3 \text{ dm} = 5 \text{ m} + 0,3 \text{ m} = 5,3 \text{ m}$

Lösning 2, enhet decimeter: $5 \text{ m} + 3 \text{ dm} = 50 \text{ dm} + 3 \text{ dm} = 53 \text{ dm}$

Exempel. Hur mycket är tre halva plus fem fjärdedelar?

Vi väljer en gemensam enhet, i detta fall fjärdedelar, och beräknar sedan summan genom att addera de nya täljarna:

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{5}{4} = \frac{6}{4} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

Exempel. $\frac{7}{3} + \frac{27}{12} = \frac{7 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{27}{12} = \frac{28}{12} + \frac{27}{12} = \frac{55}{12}$

Exempel. $\frac{37}{15} + \frac{29}{12} = \frac{37 \cdot 4}{15 \cdot 4} + \frac{29 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{148}{60} + \frac{145}{60} = \frac{293}{60}$

I det sista exemplet hade vi lite hjälp av att vi tidigare har listat ut att 60 är en lämplig gemensam nämnare för de båda talen.

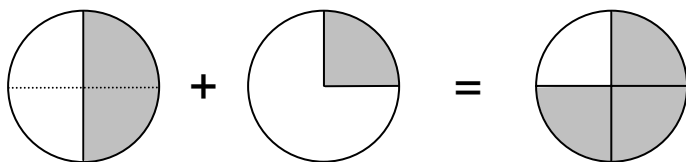
Addition av bråk med olika nämnare

5 meter plus 3 meter är 8 meter. 5 decimeter plus 3 decimeter är 8 decimeter.

Men vad är 5 meter plus 3 decimeter? Om vi väljer att räkna i enheten decimeter får vi 50 decimeter plus 3 decimeter, som är 53 decimeter.

Motsvarande enhetsbyte gör vi när vi adderar bråk med olika nämnare.

Exempel. Ett halvt äpple plus ett fjärdedels äpple är tre fjärdedels äpple.



Den streckade linjen antyder att halvan tolkas som två fjärdedelar. En halv plus en fjärdedel är lika med två fjärdedelar plus en fjärdedel, vilket är lika med tre fjärdedelar. Vi kan skriva

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$$

När vi byter enhet från halva till fjärdedelar måste vi ta dubbelt så många delar.

Exempel.
$$\frac{5}{2} + \frac{7}{4} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{7}{4} = \frac{10}{4} + \frac{7}{4} = \frac{10+7}{4} = \frac{17}{4}$$

Ibland passar inte enheterna ihop

Femhundra kronor plus trehundra kronor är åttahundra kronor.

När termerna har samma enhet kan vi addera mätetalen och svara i den gemensamma enheten.

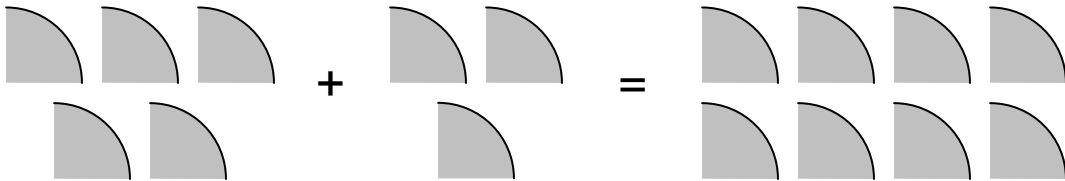
ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

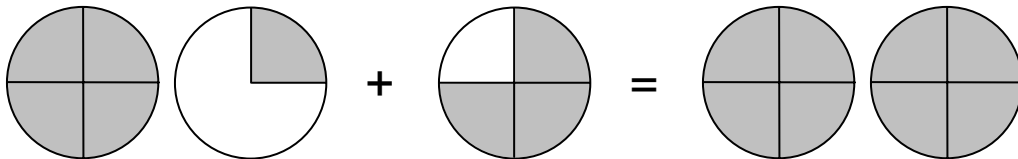
Exempel. På en förskola förbereds inför en fruktstund. Varje äpple skärs upp i fyra lika stora bitar. Barnen får äta så mycket de orkar. Lisa äter 5 bitar och Sven äter 3 bitar, dvs Lisa äter 5 fjärdedels äpple och Sven äter 3 fjärdedels äpple. Tillsammans äter de 8 fjärdedels äpple (vilket råkar motsvara precis 2 hela äpplen). I detta exempel är enheten "fjärdedels äpple".

Räkning med fjärdedelar fungerar som räkning med vilken enhet som helst. En skillnad är att det finns någon annan enhet (i exemplet "ett äpple") som man tar fjärdedelar av. Vi har då två naturliga enheter: "fjärdedels äpple" och "helt äpple".

1) 5 fjärdedelar plus 3 fjärdedelar visat i enheten "en fjärdedel" (fjärdedels äpple):



2) 5 fjärdedelar plus 3 fjärdedelar visat i enheten "en hel" (helt äpple):



Symboliskt kan vi skriva $\frac{5}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5+3}{4} = \frac{8}{4} (= 2)$

Multiplikation av bråk

När båda faktorerna i en produkt är positiva heltal har vi många sätt att tolka produkten. Exempelvis har vi sett att $5 \cdot 7 = 35$ tolkas som antalet i fem grupper med sju i varje grupp, som en upprepad addition av fem stycken sjuor eller som antalet rutor i en chokladkaka med fem respektive sju rader på sidorna.

Om första faktorn är ett positivt heltal kan vi tillämpa principen med upprepad addition, oavsett vilket tal (eller storhet) vi har i andra faktorn.

Exempel. Fem säckar som vardera väger sju kilogram väger tillsammans

$$5 \cdot 7 \text{ kg} = 35 \text{ kg}$$

”Fem gånger sju kilogram är trettiofem kilogram.”

Exempel. Fem veckor (som vardera innehåller sju dagar) innehåller tillsammans

$$5 \cdot 7 \text{ dagar} = 35 \text{ dagar}$$

”Fem gånger sju dagar är trettiofem dagar.”

Samma princip kan vi använda även om andra faktorn är ett bråk. Exempelvis är

$$5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} + \frac{7}{3} = \frac{7+7+7+7+7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3} = \frac{35}{3}$$

”Fem gånger sju tredjedelar är trettiofem tredjedelar”

Regel för multiplikation av heltal med bråk:

$$a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$$

Exempel: $5 \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{3} \quad (= \frac{35}{3})$

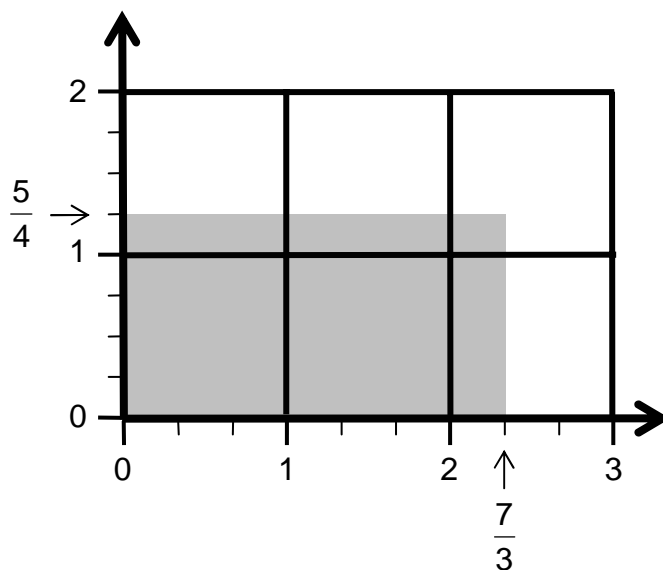
Regeln gäller för alla heltal a , b och c (utom $c = 0$)

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

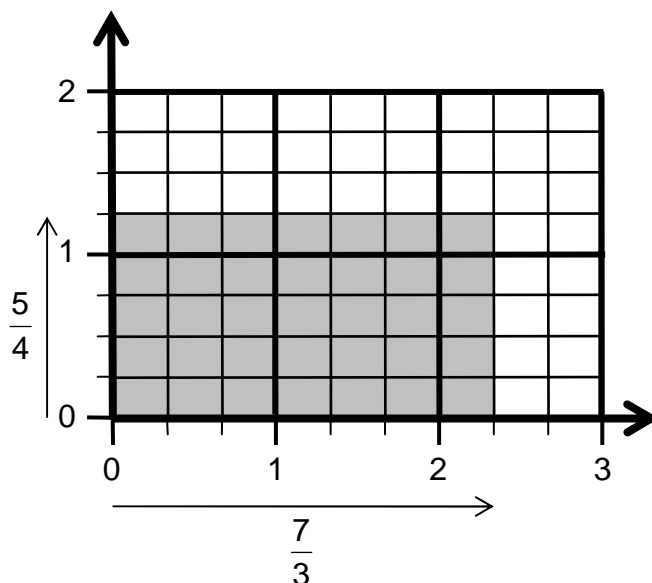
© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vad gör vi om även första faktorn är ett bråk? Vad betyder exempelvis $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3}$?

De två först nämnda förklaringsmodellerna med grupper respektive upprepad addition fungerar inte när första faktorn inte är ett positivt heltal. Vi provar chokladkakemodellen. Hur många rutor får vi om vi skär kakan så att vi får fem fjärdedels rad åt ena hållet och sju tredjedels rad åt andra hållet?



Det blir lättare att se hur vi ska besvara frågan om vi delar in kakan i mindre bitar.



Varje stor ruta är nu uppdelad i $4 \cdot 3 = 12$ mindre rutor. Varje liten ruta är en tolfedel av en stor ruta. Antalet smårutor är $5 \cdot 7 = 35$. Smårutorna tillsammans är därmed 35 tolfedelar av en stor ruta.

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vi kan därmed skriva

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 3} = \frac{35}{12}$$

Regel för multiplikation av två bråk:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Exempel: $\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{5 \cdot 7}{4 \cdot 3} \quad (= \frac{35}{12})$

Regeln gäller för alla heltal a , b , c och d (varken c eller d får vara lika med noll)

Ett vanligt förekommande fel vid multiplikation av typen $a \cdot \frac{c}{d}$ är att både täljare

och nämnare multipliceras med a , vilket ger $\frac{a \cdot c}{a \cdot d}$ (rätt svar är ju $\frac{a \cdot c}{d}$).

Man kan undvika detta fel genom att tillämpa regeln för multiplikation av två bråk, även när första faktorn är ett heltal. Då får vi

$$a \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{1 \cdot d} = \frac{a \cdot c}{d}$$

Exempel. $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{1 \cdot 3} = \frac{8}{3}$

Den som har förstått principen att "4 gånger 2 tredjedelar är 8 tredjedelar" kan naturligtvis fortsätta räkna med den (enklare) första regeln, enligt

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3}$$

Division av positiva heltal

Det finns flera sätt att hantera division. Vi visar utifrån ett exempel.

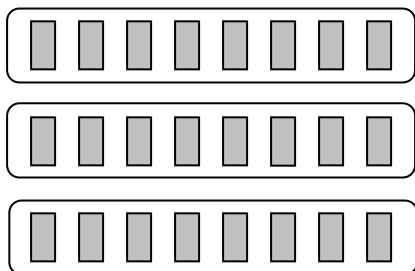
Exempel. Tre personer ska dela upp 24 samlarbilder så att alla får lika många.

Var och en får då $\frac{24}{3} = 8$ bilder.

Vi kan tolka svaret på (åtminstone) två olika sätt.

Delningsdivision

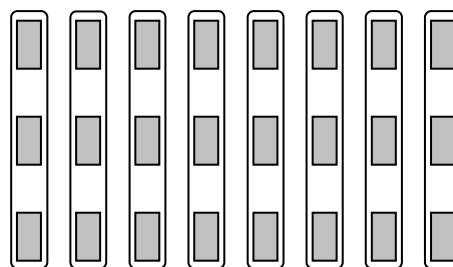
Vi har 24 bilder.
Vi ska dela upp i 3 högar.
Då blir det 8 i varje hög.



$$\frac{24}{3} \leftarrow$$

Innehållsdivision

Alla 3 ska få lika många.
Vi plockar ut 3 bilder i taget.
Det ryms 8 st 3:or i 24.



$$\frac{24}{3} \leftarrow$$

Skillnaden i tankesätt beror på vilket tal vi väljer att utgå ifrån. Delningsdivisionen utgår ifrån *täljaren* 24, medan innehållsdivisionen utgår ifrån *nämnen* 3.

Det finns en omedelbar koppling mellan division och multiplikation, som vi kan använda för att kontrollera uträkningar.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Exempel. Eftersom $3 \cdot 8 = 24$, så vet vi att $\frac{24}{3} = 8$. Vi vet också att $\frac{24}{8} = 3$.

$$\begin{array}{ccc} & 3 \cdot 8 = 24 & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \frac{24}{8} = 3 & & \frac{24}{3} = 8 \end{array}$$

Exempel. Egon ska dela 268 stenkulor med tre kompisar. Han tror att de får 67 kulor var, vilket är korrekt eftersom $4 \cdot 67 = 4 \cdot 60 + 4 \cdot 7 = 240 + 28 = 268$.

$$\begin{array}{c} 4 \cdot 67 = 268 \\ \updownarrow \\ \frac{268}{4} = 67 \end{array}$$

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Några olika sätt att räkna division

När både täljare och nämnare är små, kan vi utföra divisioner med huvudräkning.

Vi kan kontrollera svaret genom att multiplicera nämnaren med svaret.

Exempel. $\frac{42}{7} = 6$ eftersom $7 \cdot 6 = 42$.

Även när täljaren är ett stort tal kan vi ha sådan "tur" att nämnaren passar väl ihop med täljaren.

Exempel. $\frac{9063}{3} = \frac{9000}{3} + \frac{60}{3} + \frac{3}{3} = 3000 + 20 + 1 = 3021$.

Även här kan vi kontrollmultiplicera: $3 \cdot 3021 = 9000 + 60 + 3 = 9063$. Stämmer.

Om nämnaren är ensiffrig och täljaren är så stor att man inte direkt ser vad kvoten blir, kan man använda sig av *kort division*.

Exempel. Vi ska utföra divisionen $\frac{4752}{6}$ med kort division.

Tusental:

3 går 2 ggr i 7
2 ggr 3 är 6
1 kvar

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} =$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 2$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 2$$

Hundratal:

3 går 5 ggr i 17
5 ggr 3 är 15
2 kvar

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 2$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 25$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 25$$

Tiototal:

3 går 7 ggr i 21
7 ggr 3 är 21
0 kvar

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 25$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 257$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 257$$

Ental:

3 går 3 ggr i 9
3 ggr 3 är 9
0 kvar

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 257$$

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\cancel{7}}\overset{\cdot}{7}19 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} = 2573$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Om nämnaren inte är ensiffrig kan man använda den så kallade *liggande stolen*.

Exempel. Vi ska beräkna kvoten $\frac{4752}{12}$ med hjälp av liggande stolen.

Vi börjar med att skriva 4752 **ovanpå** stolsitsen och 12 **under** stolsitsen.

$$\begin{array}{r|l} 4752 & 12 \end{array}$$

Tusental:
12 ryms inte i 4

$$\begin{array}{r|l} 4752 & 12 \\ \hline \end{array}$$

Hundratal:
12 ryms 3 ggr i 47
3 ggr 12 är 36
11 hundratal kvar

$$\begin{array}{r|l} 4752 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 4752 & 12 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \end{array}$$

Tiotal:
12 ryms 9 ggr i 115
9 ggr 12 är 108
7 tiotal kvar

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \\ -108 & \\ \hline 72 & \end{array}$$

Ental:
12 ryms 6 ggr i 72
6 ggr 12 är 72
0 ental kvar

$$\begin{array}{r} 39 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \\ -108 & \\ \hline 72 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \\ -108 & \\ \hline 72 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 396 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \\ -108 & \\ \hline 72 & \\ -72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Färdig uppställning:

$$\begin{array}{r} 396 \\ \hline 4752 & 12 \\ -36 & \\ \hline 1152 & \\ -108 & \\ \hline 72 & \\ -72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Ibland går divisionen inte jämnt ut. Då får vi en *rest*.

Exempel. $\frac{25}{3} = \frac{24}{3} + \frac{1}{3} = 8 + \frac{1}{3}$. Svaret kan skrivas i *blandad form* som $8\frac{1}{3}$.

En tolkning av uträkningen ovan: Om 3 personer ska dela på 25 äpplen, så får de 8 äpplen var. Återstår 1 äpple för de 3 att dela på.

Exempel. Uppställningen nedan visar att $\frac{5977}{31} = 192\frac{25}{31}$.

$$\begin{array}{r}
 192 \\
 \hline
 5977 \overline{)31} \\
 \underline{-31} \\
 2877 \\
 \underline{-279} \\
 87 \\
 \underline{-62} \\
 25
 \end{array}
 \quad \text{kan jämföras med:} \quad
 \begin{array}{r}
 8 \\
 \hline
 25 \overline{)3} \\
 \underline{-24} \\
 1
 \end{array}$$

Om vi utför divisionen $\frac{5977}{31}$ med räknare får vi svaret 192,80645 i *decimalform*.

En uppställning som tillåter oss att fortsätta räkna fram decimaler är den så kallade "trappan". Enda skillnaden jämfört med stolen är att nämnaren skrivs till vänster, vilket gör att vi kan fylla på med decimaler till höger, dvs i täljaren.

$$\begin{array}{r}
 192,80645 \\
 \hline
 31 \overline{)5977,00000} \\
 \underline{-31} \\
 2877 \\
 \underline{-279} \\
 87 \\
 \underline{-62} \\
 250 \\
 \underline{-248} \\
 20 \\
 \underline{-0} \\
 200 \\
 \underline{-186} \\
 140 \\
 \underline{-124} \\
 160 \\
 \underline{-155} \\
 5
 \end{array}$$

Att dividera ett bråk med ett heltal

Vad är hälften av 6 äpplen? Svar: 3 äpplen.

Vad är hälften av 6 kronor? Svar: 3 kronor.

På samma sätt inses att hälften av 6 sjundedelar är 3 sjundedelar:

$$\frac{6}{2} = \frac{6/2}{1} = \frac{3}{1}$$

Om vi ska ta hälften av 5 blir det lite knepigare.

Hälften av 5 äpplen är 2 och ett halvt äpple.

Hälften av 5 kronor är 2 kronor och 50 öre.

Hälften av 5 sjundedelar är 2,5 sjundedelar:

$$\frac{5}{2} = \frac{5/2}{1} = \frac{2,5}{1}$$

”Två och en halv sjundedel” är inget ”snyggt” svar. Vi vill gärna ha svaret uttryckt som en kvot av två heltal, vilket vi får om vi förlänger med 2:

$$\frac{2,5}{1} = \frac{2,5 \cdot 2}{1 \cdot 2} = \frac{5}{2}$$

Vi kan göra hela uträkningen effektivare om vi **först** förlänger med 2:

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \cdot 2}{2 \cdot 2} = \frac{10}{4} = \frac{10/2}{4/2} = \frac{5}{2}$$

Jämför uträkningen ovan med att ta hälften av 5 kr genom att först växla in 5 enkronor mot 10 st 50-öringar. Hälften av 10 st 50-öringar är 5 st 50-öringar.

Division med 2 kan utföras genom att vi dividerar täljaren med 2 **eller** genom att vi multiplicerar nämnaren med 2. Varför fungerar båda sätten? Jo, när vi dividerar täljaren med 2 så tar vi *hälften av antalet*. När vi multiplicerar nämnaren med två får vi *halva storleken*. Båda sätten innebär en *halvering*.

Motsvarande gäller division med alla heltal.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Exempel. Vi ska visa två sätt att beräkna en tredjedel av 12 sjundedelar.

1) $\frac{12}{7} = \frac{12/3}{7} = \frac{4}{7}$ dividera täljaren 12 med 3 (eftersom det går jämnt ut)

då behåller du *samma storlek* $\frac{1}{7}$

men har *färre delar* (4 st istället för 12 st)

2) $\frac{12}{7} = \frac{12}{7 \cdot 3} = \frac{12}{21}$ multiplicera nämnaren 7 med 3

då får du en *mindre storlek* ($\frac{1}{21}$ istället för $\frac{1}{7}$)

men behåller *samma antal delar* (12 st)

(Det andra svaret bör förenklas enligt $\frac{12}{21} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{4}{7}$.)

Exempel. Vad är en tredjedel av 5 sjundedelar?

1) I beräkningen nedan "växlar" vi varje sjundedel mot 3 tjugoförstedelar.

Vi får då 15 tjugoförstedelar (istället för fem sjundedelar).

En tredjedel av 15 tjugoförstedelar är 5 tjugoförstedelar:

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = \frac{15}{21} = \frac{15/3}{21} = \frac{5}{21}$$

2) Alternativt kan vi göra enheten en tredjedel så stor:

$$\frac{5}{7} = \frac{5}{7 \cdot 3} = \frac{5}{21}$$

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Att dividera med $\frac{1}{4}$ och $\frac{1}{n}$

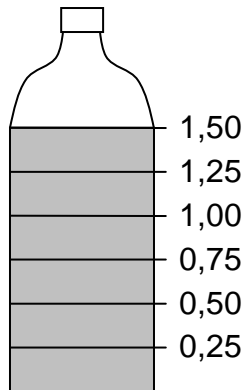
Hur många 25-centiliters glas kan man fylla med en flaska som rymmer 1,5 liter?

Lösning: 25 cl är en fjärdedels liter.

1 liter räcker till 4 glas.

0,5 liter räcker till 2 glas.

1,5 liter räcker alltså till 6 glas.



Uttryckt som en (innehålls-)division av bråktalet har vi listat ut att

$$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{4}} = 6$$

”Det ryms sex stycken fjärdedelar i tre halva”

Lösningen byggde på att vi kunde komma fram till att 1 liter räcker till 4 glas.

Vi kan resonera vidare och dra slutsatsen att 2 liter räcker till $2 \cdot 4 = 8$ glas, 3 liter räcker till $3 \cdot 4 = 12$ glas osv, så att x liter räcker till $x \cdot 4$ glas.

Detta innebär att vi kan räkna enligt

$$\frac{x}{\frac{1}{4}} = x \cdot 4$$

Mer generellt, om vi dividerar med ett tal av typen $\frac{1}{n}$, så blir

$$\frac{x}{\frac{1}{n}} = x \cdot n \quad \left(\frac{1}{n} \text{ ryms } n \text{ gånger i en hel och } x \cdot n \text{ gånger i } x \text{ hela}\right)$$

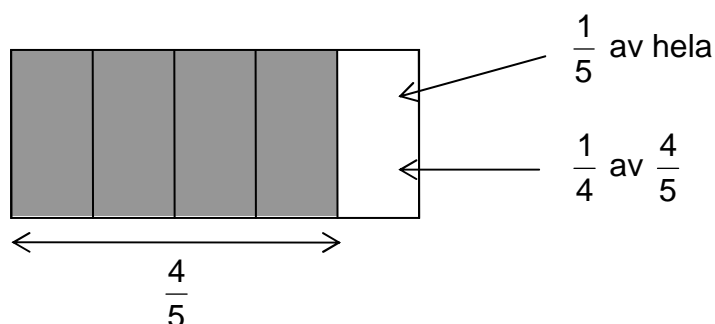
Att dividera med $\frac{4}{5}$

Vi börjar med att utföra divisionen

$$\frac{1}{\frac{4}{5}}$$

Detta kan vi göra genom att tänka innehållsdivision:

Hur många gånger rym $\frac{4}{5}$ i en hel?



Först rym det *en* $\frac{4}{5}$. Den återstående femtedelen är *en fjärdedels* $\frac{4}{5}$.

Alltså rym det *en* och *en fjärdedels* $\frac{4}{5}$ i en hel, dvs svaret är

$$\frac{1}{\frac{4}{5}} = 1 + \frac{1}{4}$$

Vi kan uttrycka svaret antingen i *blandad form* som $1\frac{1}{4}$ eller i bråkform som $\frac{5}{4}$.

Exempel. Hur många gånger rym $\frac{4}{5}$ i 3 hela?

Vi vet att $\frac{4}{5}$ rym $\frac{5}{4}$ gånger i 1 hel. $\frac{4}{5}$ rym då $3 \cdot \frac{5}{4}$ gånger i 3 hela.

Vi kan räkna så här:

$$\frac{3}{\frac{4}{5}} = 3 \cdot \frac{5}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} \quad \left(= 3\frac{3}{4} \right)$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Genom att på motsvarande sätt utnyttja sambandet

$$\frac{x}{\frac{4}{5}} = x \cdot \frac{1}{\frac{4}{5}} = x \cdot \frac{5}{4}$$

kan vi skriva om varje division med $\frac{4}{5}$ som en multiplikation med $\frac{5}{4}$.

Exempel.
$$\frac{\frac{9}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{9}{7} \cdot \frac{5}{4} = \frac{9 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{45}{28}$$

Talet $\frac{5}{4}$ kallas det *inverterade* (eller *omvända*) talet till $\frac{4}{5}$. Vi får det inverterade

talet genom att täljare och nämnare byter plats.

Varje division med ett bråktalet som nämnare kan skrivas som en multiplikation med nämnarens inverterade tal.

Exempel.
$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 1} = \frac{8}{3}$$

Denna regel kan även användas för att utföra divisioner med heltal.

Exempel.
$$\frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{1}} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}$$

Jämför uträkningen ovan med de vi gjorde tidigare:

$$\frac{6}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{6/2}{7} = \frac{3}{7} \quad \text{och} \quad \frac{6}{7} \div \frac{2}{1} = \frac{6}{7 \cdot 2} = \frac{3}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}$$

Man kan kanske fråga sig vilken som är bäst? Svaret är att alla tre är bra, bäst är om man förstår sig på många olika sätt att hantera divisionen. En fördel med de nedre är att vi kan förstå att halvering kan utföras genom att antingen ta hälften så många delar (3 istället för 6) eller genom att halvera storleken på delarna

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

($\frac{1}{7 \cdot 2}$ istället för $\frac{1}{7}$). En nackdel är att om vi glömmer bort denna tolkning så kan

principerna vara knepiga att komma ihåg. Uträkningen

$$\frac{\frac{6}{7}}{2} = \frac{\frac{6}{7}}{\frac{2}{1}} = \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{6 \cdot 1}{7 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7}$$

har fördelen att den bygger på en generell (ganska abstrakt) regel för division av två bråk, nämligen

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Eftersom denna regel är ganska abstrakt kan det vara bra att ibland (när det passar) använda någon av de båda andra reglerna, för att bättre förstå vad divisionen går ut på.

KAPITEL 3




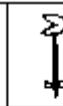


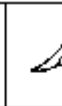
DECIMALTAL


Matematikhistoria: Talsymboler och talsystem


Genom historien har man haft många olika sätt att beteckna tal. Vi tar en titt på några som haft särskilt stor betydelse för utvecklingen av de tal vi använder idag.




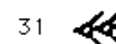
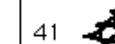



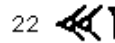
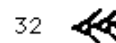
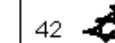




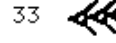
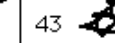




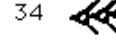
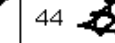




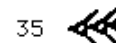
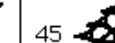





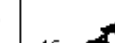
























Människan har räknat sedan urminnes tider. Exempelvis har man funnit ett 30 000 år gammalt vargben med skårer, ordnade i grupper om fem, som tyder på att man har räknat något med hjälp av hjält av skårorna.

Den så kallade *Rhindpapyren* från 1600 f.Kr. innehåller egyptisk matematik från pyramidernas tid. Den hittades 1858 och finns på British Museum i London. Man räknade med hjälp av följande tecken:

						
1	10	100	1000	10000	100000	1000000


276

Ungefär samtida, ett par tusen år f.Kr., använde babylonierna (som levde i Mesopotamien, mellan floderna Eufrat och Tigris) ett system med symboler för talen 1-59. Större tal skrev de genom att kombinera symbolerna, exempelvis skrevs talet 70 som  vilket vi kan läsa som 22 + 22.

1 	11 	21 	31 	41 	51 
2 	12 	22 	32 	42 	52 
3 	13 	23 	33 	43 	53 
4 	14 	24 	34 	44 	54 
5 	15 	25 	35 	45 	55 
6 	16 	26 	36 	46 	56 
7 	17 	27 	37 	47 	57 
8 	18 	28 	38 	48 	58 
9 	19 	29 	39 	49 	59 
10 	20 	30 	40 	50 	

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Symbolen för talet 1 fick alltså betydelsen 60 när den skrevs till vänster om en annan symbol. Om den skrevs ytterligare ett steg till vänster betydde den $60 \cdot 60 = 3600$, ytterligare ett steg betydde $60 \cdot 60 \cdot 60 = 216000$. Fördelen med att låta symbolens **position** påverka symbolens värde var att man kunde skriva mycket stora tal med ett fåtal symboler. Ett exempel:

$$\begin{array}{ccc} \Upsilon & \lll & \lll\Upsilon \\ 1 \cdot 3600 + 30 \cdot 60 + 11 = 5411 \end{array}$$

Det talsystem vi använder oss av idag kan sägas kombinera egyptiernas och babyloniernas sätt att skriva tal. Från egyptierna har vi lånat basen 10 och från babylonierna har vi lånat idén om att positionen påverkar symbolens värde.

De siffrorsymboler 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 som vi använder idag har indiskt ursprung. 300 år f.Kr. skrevs siffrorna 1, 2, 3 så här:

Indien 300 f.Kr.

$$\begin{array}{ccc} \text{—} & \text{= } & \text{= } \\ & & \text{= } \end{array}$$

De övriga siffrorna var något krångligare, men siffrorna utmynnade så småningom i de siffror 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 vi använder idag.

Det dröjde ända till år 650 e.Kr. innan talet 0 kom i allmänt bruk. Det finns dock belägg för att enskilda matematiker, exempelvis den egyptiske astronomen Ptolemaios på 100-talet e.Kr., långt tidigare använde sig av denna speciella symbol, som vi idag inte klarar oss utan. Vi kan ju exempelvis skriva

$$37050 = 3 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 5 \cdot 10$$

Nollorna i 37050 hjälper oss att hålla reda på rätt värde på siffrorna 3, 7 och 5.

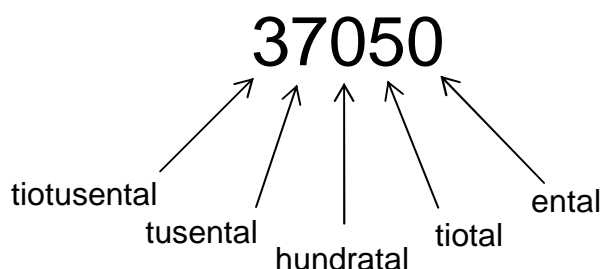
Avslutningsvis kan det vara värt att påpeka att siffrorna och siffersystemet inte "uppfunnits" av vare sig egyptier, babylonier eller indier. Det finns både föregångare och efterföljare. För inte alltför länge sedan sade man att vi använder oss av det arabiska siffersystemet. Araberna byggde vidare på det indiska systemet och ordet "siffra" (eller "cifra") kommer just från arabiskan. Inom flera andra kulturer har man använt liknande system. Det gäller exempelvis grekerna, Maya-kulturen och kineserna, som tidigt hade utvecklat en avancerad matematik. Behov av siffersystem har uppstått i varje kultur, där man har behövt reglera egendom och bedriva handel. Intressant är att dessa behov har lösts på mycket likartade sätt av kulturer som inte haft kontakt med varandra.

Positionssystemet

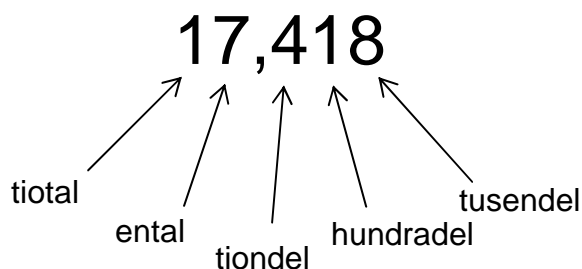
Varje siffras värde i ett tal bestäms av dess position. När vi ser ett tal som 37050 så vet vi att trean bidrar med 30000. Vi kan skriva

$$37050 = 3 \cdot 10000 + 7 \cdot 1000 + 5 \cdot 10$$

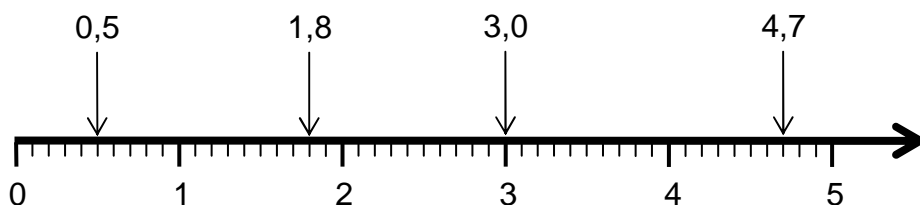
När vi flyttar oss åt vänster i talet är varje position värd 10 gånger mer än den föregående. För varje steg åt höger blir positionen värd 10 gånger mindre.



Ibland vill vi arbeta med positiva tal som är mindre än 1. Då behöver vi använda oss av *decimaller*. Till att börja med sätter vi ett *decimalkomma* omedelbart till höger om heltalspositionen, just för att hålla reda på var denna position är.



Vi kan tänka oss att varje sådant *decimaltal* har en plats på tallinjen genom att göra en mer detaljerad indelning av utrymmet mellan heltalen.



Denna gradering är av samma typ som millimetergraderingarna på en linjal.



Om vi kan göra om decimaltalsfaktorer till heltal så blir det enklare att räkna.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Exempel. 30 bollar som vardera kostar 4,70 kostar tillsammans

$$30 \cdot 4,70 = 3 \cdot 47 = 120 + 21 = 141$$

$$\frac{30}{10} \cdot 10 \cdot 4,7$$

eller: $(3 \cdot 10) \cdot 4,7 = 3 \cdot (10 \cdot 4,7)$

"första faktorn görs 10 ggr mindre, andra faktorn görs 10 ggr större"

"faktorn 10 flyttas från 30 till 4,7"

Exempel. $6000 \cdot 2,9 = 6 \cdot 1000 \cdot 2,9 = 6 \cdot 2900 = 12000 + 5400 = 17400$

Varje decimaltal kan skrivas som en produkt där ena faktorn är ett tal mellan 1 och 10 (vi tillåter 1 men inte 10). Vi gör detta enklast genom att behålla siffrorna i talet och "flyttar decimalkommat" genom att faktorisera.

Några exempel:

900 = 9 · 100	9 · 100
9530 = 9,53 · 1000	9,53 · 1000
27400 = 2,74 · 10000	2,74 · 10000
0,03 = 3 · 0,01	3 · 0,01
0,0028 = 2,8 · 0,001	2,8 · 0,001

Talen 100, 1000, 10000 kan beskrivas utifrån hur många faktorer 10 de innehåller. Vi skriver

$$100 = 10 \cdot 10 = 10^2$$

$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3$$

$$10000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$$

skrivsätt som införs för att hålla reda på talets storlek

Vidare skriver vi

$$0,01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$0,001 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$$

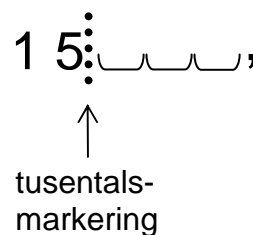
Vi redovisar de vanligaste *tio-potenserna* .

Beteckning	Betydelse	Decimalform	Läses
10^6	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	1000000	en miljon
10^5	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	100000	ett hundratusen
10^4	$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$	10000	tio tusen
10^3	$10 \cdot 10 \cdot 10$	1000	ett tusen
10^2	$10 \cdot 10$	100	ett hundra
10^1	22	10	tio
10^0	1	1	ett
10^{-1}	$\frac{1}{10}$	0,1	en tiondel
10^{-2}	$\frac{1}{10 \cdot 10}$	0,01	en hundradel
10^{-3}	$\frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10}$	0,001	en tusendel

Tio-potenserna kan användas som *enheter*. Då kan beräkning av produkter som $3 \cdot 5000$ eller $3 \cdot 0,05$ reduceras till att beräkna $3 \cdot 5 = 15$.

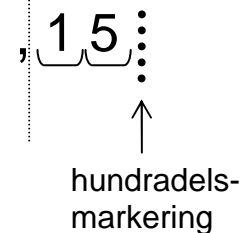
Exempel. $3 \cdot 5000 = 3 \cdot 5 \text{ tusen} = 15 \text{ tusen} = 15000$

Här räknar vi tusental istället för ental.



Exempel. $3 \cdot 0,05 = 3 \cdot 5 \text{ hundradelar} = 15 \text{ hundradelar} = 0,15$

Här räknar vi hundradelar istället för ental.



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.
När båda faktorerna har decimaler blir det ännu knepigare.

Exempel. Vi ska beräkna produkten $0,04 \cdot 0,037$.

Lösning: Först skriver vi

$$0,04 \cdot 0,037 = 4 \cdot 0,01 \cdot 37 \cdot 0,001 = 4 \cdot 37 \cdot 0,01 \cdot 0,001$$

Sedan listar vi ut (det är inte nödvändigt att skriva så utförligt som nedan) att

$$0,01 \cdot 0,001 = \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{1000} = \frac{1}{100 \cdot 1000} = \frac{1}{100000} = 0,00001$$

När vi väl vet att uppgiften handlar om hundratusendelar kan vi räkna enligt

$$0,04 \cdot 0,037 = 4 \cdot 37 \cdot 0,00001 = 148 \cdot 0,00001 = 0,00148$$

Knepigast blir det om även heltalsmultiplikationen är svår att utföra. Vi visar två uppställningar för att utföra multiplikationen $6,43 \cdot 3,8$.

$$\begin{array}{r} 6,43 \\ \cdot 3,8 \\ \hline 0,024 \\ 0,320 \\ 4,800 \\ 0,090 \\ 1,200 \\ + 18,000 \\ \hline 24,434 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0,8 \cdot 0,03 = 8 \cdot 3 \cdot 0,001 = 24 \cdot 0,001 = 0,024 \\ 0,8 \cdot 0,4 = 8 \cdot 4 \cdot 0,01 = 32 \cdot 0,01 = 0,32 \\ 0,8 \cdot 6 = 8 \cdot 6 \cdot 0,1 = 48 \cdot 0,1 = 4,8 \\ 3 \cdot 0,03 = 3 \cdot 3 \cdot 0,01 = 9 \cdot 0,01 = 0,09 \\ 3 \cdot 0,4 = 3 \cdot 4 \cdot 0,1 = 12 \cdot 0,1 = 1,2 \\ 3 \cdot 6 = 18 \end{array}$$

Alternativt kan vi utnyttja det faktum att $6,43 \cdot 3,8 = 643 \cdot 38 \cdot 0,001$.

$$\begin{array}{r} 643 \\ \cdot 38 \\ \hline 24 \\ 320 \\ 4800 \\ 90 \\ 1200 \\ + 18000 \\ \hline 24434 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 8 \cdot 3 = 24 \\ 8 \cdot 40 = 320 \\ 8 \cdot 600 = 4800 \\ 30 \cdot 3 = 90 \\ 30 \cdot 40 = 1200 \\ 30 \cdot 600 = 18000 \end{array}$$

I detta fall måste vi komma ihåg att multiplicera $643 \cdot 38 = 24434$ med 0,001 vilket ger svaret 24,434.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vid addition och subtraktion av enkla decimaltal kan vi räkna för hand med samma metoder som användes vid heltalsräkning.

Exempel. 1. $3,8 + 2,6 = (3 + 0,8 + 2 + 0,6 = 3 + 2 + 0,8 + 0,6) = 5 + 1,4 = 6,4$

2. $3,8 + 2,6 = (3,8 + 2 + 0,6) = 5,8 + 0,6 = 6,4$

3. $3,8 + 2,6 = (3,8 - 0,4 + 2,6 + 0,4) = 3,4 + 3 = 6,4$

Exempel. 1. $3,8 - 2,6 = (3 + 0,8 - 2 - 0,6 = 3 - 2 + 0,8 - 0,6) = 1 + 0,2 = 1,2$

2. $3,8 - 2,6 = (3,8 - 2 - 0,6) = 1,8 - 0,6 = 1,2$

3. $3,8 - 2,6 = (3,8 + 0,4 - 2,6 - 0,4) = 4,2 - 3 = 1,2$

När decimaltalen har fler siffror kan vi använda samma uppställningar som tidigare för att utföra addition och subtraktion.

Exempel. Vi beräknar summan $13,47 + 9,675$

Med minnessifra:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \\ 13,47 \\ + 9,675 \\ \hline 23,145 \end{array}$$

Mer utförligt:

$$\begin{array}{r} 13,47 \\ + 9,675 \\ \hline 0,005 \\ 0,140 \\ 1,000 \\ 12,000 \\ + 10,000 \\ \hline 23,145 \end{array}$$

Det går faktiskt också bra att räkna för hand:

$$13,47 + 9,675 = 22,47 + 0,675 = 23,07 + 0,075 = 23,145$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Exempel. Vi beräknar differensen $8,574 - 5,39$.

$$\begin{array}{r} ^4 ^{10} \\ 8,574 \\ - 5,39 \\ \hline 3,184 \end{array}$$

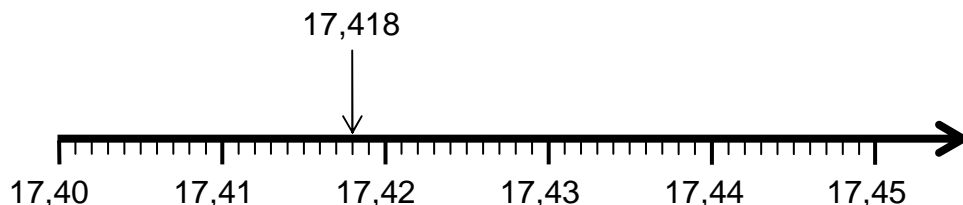
Det går också att räkna för hand, exempelvis med utfyllnadsmetoden: från 5,39 till 6,00 är det 0,61, ytterligare 2 från 6 till 8 och ytterligare 0,574 från 8 till 8,574.

Därmed kan vi skriva

$$8,574 - 5,39 = 0,61 + 2 + 0,574 = 2,61 + 0,574 = 3,184$$

Avrundning och överslagsräkning

Om vi tänker oss en kraftigt uppförstorad del av tallinjen (längre åt höger än i bilden ovan) så kan vi placera 17,418 mellan 17,41 och 17,42.

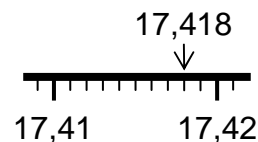


Om vi ska avrunda 17,418 till två decimalers noggrannhet så väljer vi att avrunda till 17,42, eftersom 17,418 ligger närmre 17,42 än 17,41 (samt alla andra tal med två decimaler). Vi skriver

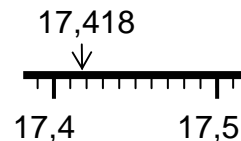
$$17,418 \approx 17,42$$

Om ett tal skall avrundas till en viss noggrannhet, så väljer vi det *närmsta* talet av de tal som har denna noggrannhet.

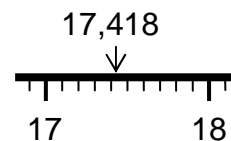
Två decimalers noggrannhet: $17,418 \approx 17,42$



En decimals noggrannhet: $17,418 \approx 17,4$



Avrundat till närmsta heltal: $17,418 \approx 17$



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Om det tal vi ska avrunda ligger precis mitt emellan två av de tal vi har att välja bland, så avrundar vi uppåt, dvs till det större av dessa tal. Några exempel (där vi avrundar sista siffran i talet) är

$$17,5 \approx 18$$

$$137,65 \approx 137,7$$

$$435 \approx 440$$

Ibland vill man snabbt få en uppfattning om ett uttrycks värde. Då kan man göra en överslagsräkning genom att avrunda talen så att man kan räkna i huvudet.

Exempel. En spis som kostar 3126 kr och en kombinerad kyl+frys för 12738 kr kostar tillsammans ungefär

$$3000 + 13000 = 16000 \text{ kr}$$

En lite mer noggrann uppskattning av priset är

$$3100 + 12700 = 15800 \text{ kr}$$

(Alternativt kan man räkna "uppåt" så att man säkert vet att man har råd med inköpen: spisen och kyl+frysen kostar inte mer än $3200 + 12800 = 16000$ kr.)

Det finns inga bestämda regler för hur överslagsräkningar ska utföras. Här får de matematiska kunskaperna om avrundning kombineras med sunt förnuft och anpassas till vad man behöver i den aktuella situationen.

Man får akta sig för att avrunda hur som helst.

Exempel. Om vi avrundar talen 326 och 265 till närmaste hundratal får vi 300. Subtraktionen $326 - 265$ kan rimligen *inte* uppskattas med $300 - 300 = 0$.

Signifikanta siffror och grundpotensform

Ibland anger man precisionen i talet i antalet signifikanta siffror.

187,49 har fem signifikanta siffror

3005 har fyra signifikanta siffror

När det gäller tal som avslutas med nollor är det lite knepigt. Talet 2000 kan ha en, två, tre eller fyra signifikanta siffror beroende på sammanhanget.

Exempel. "Det var tvåtusen på matchen Elfsborg-Djurgården i lördags." Här rör det sig troligvis om en eller möjligtvis två signifikanta siffror i talet 2000. (Den verkliga publiken kanske var 2217, men man väljer ofta att säga bara "tvåtusen".

Exempel. "Jag fick tvåtusen av mormor i födelsedagspresent." Här kan man anta att det rör sig om exakt 2000 kr, dvs fyra signifikanta siffror.

För att det inte ska uppstå tveksamheter om antalet signifikanta siffror, så kan man använda sig av ett speciellt skrivsätt.

Varje positivt tal kan skrivas i *grundpotensform* som en produkt av ett tal mellan 1 och 10 (inklusive 1) och en *tio-potens* 10^k , där heltalet k visar hur många faktorer 10 som ingår (om $k \geq 0$) eller saknas (om $k < 0$) i talet.

Exempel. Genom att upprepade gånger bryta ut en faktor 10 ur 34500 får vi

$$34500 = 3450 \cdot 10 = 345 \cdot 10 \cdot 10 = 34,5 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 3,45 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$$

Vi kan välja att direkt faktorisera 10000 ur 34500 enligt

$$34500 = 3,45 \cdot 10000 = 3,45 \cdot 10^4$$

Om 34500 har 3 signifikanta siffror är grundpotensformen $3,45 \cdot 10^4$.

Om 34500 har 4 signifikanta siffror är grundpotensformen $3,450 \cdot 10^4$.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Om 34500 har 5 signifikanta siffror är grundpotensformen $3,4500 \cdot 10^4$.

I grundpotensformen kan vi alltså se talets noggrannhet.

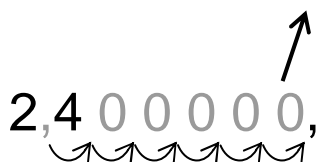
Exempel. Skriv $2,4 \cdot 10^6$ på vanlig form.

Lösning: 10^6 betyder sex stycken faktorer 10, så

$$10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000000 \text{ (en miljon)}$$

Därmed är

$$2,4 \cdot 10^6 = 2,4 \cdot 1000000 = 2400000$$



”flytta decimalkommat sex steg
åt höger och fyll på med nollor”

Exempel. Skriv $6,2 \cdot 10^{-3}$ på vanlig form.

Lösning: 10^{-3} betyder att tre faktorer 10 ”saknas”, vilket kan förtydligas med

$$10^{-3} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{1000} \text{ (en tusendel)}$$

Därmed är

$$6,2 \cdot 10^{-3} = \frac{6,2}{1000} = 0,0062$$



”flytta decimalkommat tre steg
åt vänster och fyll på med nollor”

Potenser

Vi har sett att varje tal som består av en 1:a och resten 0:or kan skrivas som en tiopotens. Exempelvis kan vi skriva

$$1000 = 10^3$$

$$0,001 = 10^{-3}$$

Omvänt kan vi räkna ut tiopotenser, exempelvis är

$$10^5 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 100000$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10000} = 0,0001$$

Vi kan använda motsvarande beteckningar för potenser i andra *baser* än 10.

Med basen 2:

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

(Hur långt orkar du räkna? Prova 2^{10} .)

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{16}$$

Med basen 3:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

($3 \cdot 9 \cdot 9 = 3 \cdot 81 = 240 + 3 = 243$)

$$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

Potens	Betydelse	Läses	Bas	Exponent
3^5	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3 upphöjt till 5	3	5
3^4	$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$	3 upphöjt till 4	3	4
3^3	$3 \cdot 3 \cdot 3$	3 upphöjt till 3	3	3
3^2	$3 \cdot 3$	3 upphöjt till 2	3	2
3^1	3	3 upphöjt till 1	3	1
3^0	?	3 upphöjt till 0	3	0
3^{-1}	$\frac{1}{3}$	3 upphöjt till -1	3	-1
3^{-2}	$\frac{1}{3 \cdot 3}$	3 upphöjt till -2	3	-2
3^{-3}	$\frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3}$	3 upphöjt till -3	3	-3

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

En positiv exponent anger hur många faktorer av basen som ingår i potensen.

När exponenten är negativ hamnar faktorerna istället i nämnaren. Lägga märke till

mönstret i tabellen: När vi läser uppifrån och ner minskar exponenten med 1,

vilket innebär att vi dividerar potensen med 3. Om vi följer detta mönster så är

det rimligt att definiera $3^0 = 1$. Vi definierar allmänt

$$a^0 = 1 \quad \text{för alla baser } a$$

Nu ska vi ge oss in på räkneregler för potensräkning.

Exempel. $3^5 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$.

5 faktorer 3 följt av 2 faktorer 3 är totalt $5 + 2 = 7$ faktorer 3. Vi kan förkorta räkningarna till

$$3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+2} = 3^7$$

Det verkar som om vi kan multiplicera två potenser med samma bas genom att addera exponenterna.

Denna regel gäller även om någon av (eller båda) exponenterna är negativa tal.

Exempel. $4^3 \cdot 4^{-5} = (4 \cdot 4 \cdot 4) \cdot \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot 4} = 4^{-2}$.

Även här kan vi beräkna produkten genom att addera exponenterna:

$$4^3 \cdot 4^{-5} = 4^{3+(-5)} = 4^{-2}$$

Regel för multiplikation av två potenser med samma bas

Vi kan multiplicera två potenser med samma bas genom att addera exponenterna:

$$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$$

Denna regel gäller för alla heltal m och n , samt alla baser b .

(Med undantag av basen 0, som kan ge upphov till division med 0, vilket ju är otillåtet. Fast basen 0 har vi ändå aldrig anledning att använda oss av.)

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

När vi dividerar två potenser med samma bas kan vi förkorta faktorer.

Exempel. $\frac{4^3}{4^5} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{1}{4 \cdot 4} = 4^{-2}$.

Att svaret blir 4^{-2} beror alltså på att nämnaren 4^5 har 2 fler faktorer 4 än 4^3 .

Vi kan utföra divisionen något snabbare genom att subtrahera exponenterna:

$$\frac{4^3}{4^5} = 4^{3-5} = 4^{-2}$$

Regel för division av två potenser med samma bas

Vi kan dividera två potenser med samma bas genom att subtrahera exponenterna:

$$\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$$

Denna regel gäller för alla heltal m och n , samt alla baser b .

(Med undantag av basen 0, som kan ge upphov till division med 0, vilket ju är otillåtet. Fast basen 0 har vi ändå aldrig anledning att använda oss av.)

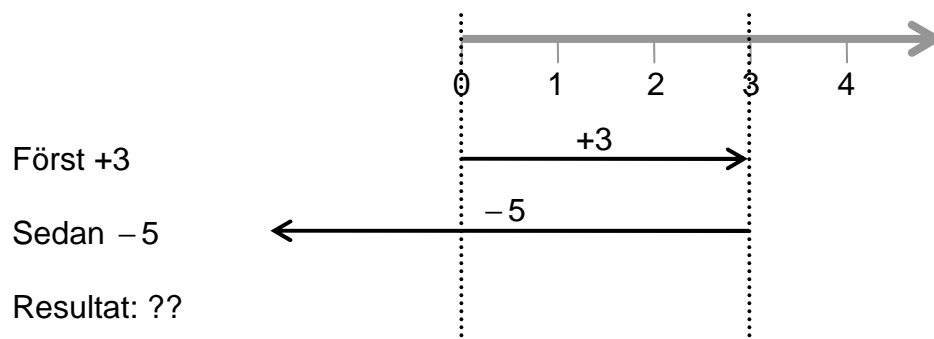
KAPITEL 4

NEGATIVA TAL OCH SUBTRAKTION

Negativa heltal och motsatta tal

Vad kan vi säga om subtraktionen $3 - 5$?

Man kan tycka att subtraktionen inte går att utföra. Subtraktion handlar om att ta bort och vi kan väl inte ta bort mer än vad vi har? Uttrycket $3 - 5$ skulle därmed sakna mening.

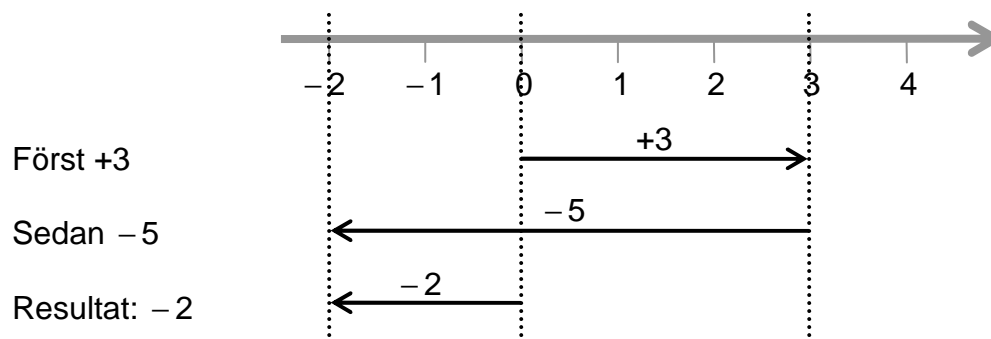


En annan ståndpunkt är att det visst går att ta bort 5 från 3. Om vi har 3 och ska betala 5 så blir vi skyldiga 2. Skulden 2 kan vi beteckna -2 (analogt med -5 som ju också är en slags skuld).

Båda ståndpunkterna kan försvaras. De är inte motstridiga eftersom de baseras på olika förutsättningar om vilka tal som anses vara acceptabla att arbeta med. Uttrycket $3 - 5$ saknar mening så länge vi bara arbetar med positiva heltal. Om vi även tillåter oss att arbeta med negativa heltal kan vi däremot skriva

$$3 - 5 = -2$$

Denna subtraktion kan tolkas på en förlängd tallinje, som även inkluderar negativa heltal.



Lägg märke till att såväl -5 som -2 representeras med talpilar som har *motsatt riktning* jämfört med talpilarna för 5 respektive 2.

Motsatta tal

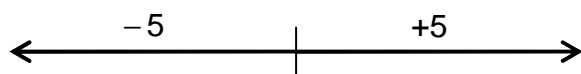
Talpilen till talet a är lika lång som talpilen till talet $-a$.

Skillnaden är att talpilarna har motsatt riktning.

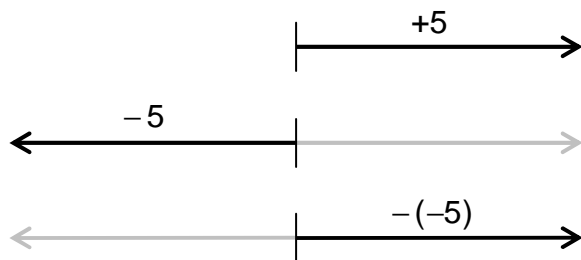
Talen a och $-a$ kallas därför *motsatta tal*.

Exempelvis är 5 och -5 motsatta tal.

-5 är motsatta talet till 5 och 5 är motsatta talet till -5 .

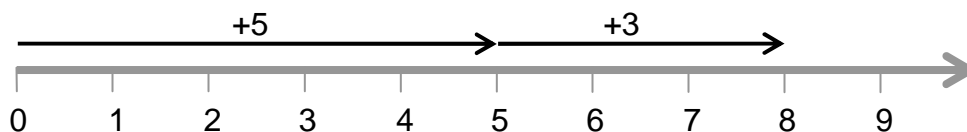


Exempel. Motsatta talet till -5 kan betecknas $-(-5)$. Å andra sidan vet vi att motsatta talet till -5 är 5. Alltså gäller det att $-(-5) = 5$.

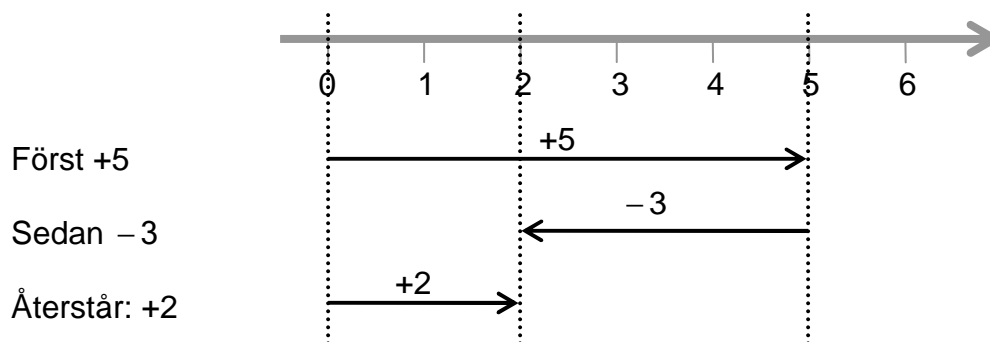


Subtraktion kan skrivas som addition

Addition handlar om att lägga till. Exempelvis kan additionen $5 + 3 = 8$ illustreras genom att lägga till talpilen för $+3$ efter talpilen för $+5$.



Bilden nedan har vi tidigare använt för att beskriva subtraktionen $5 - 3 = 2$. Vi ska se att denna subtraktion kan tolkas som en addition.



Lägg märke till att talpilen för -3 läggs till efter talpilen för $+5$. Vi kan därmed tolka subtraktionen $5 - 3$ som en addition enligt

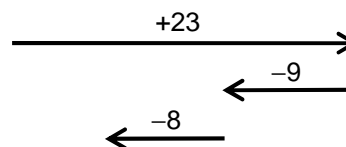
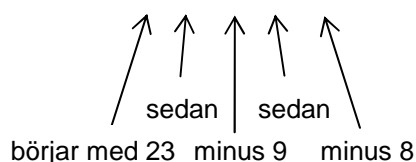
$$5 - 3 = 5 + (-3)$$

Subtraktion med 3 kan skrivas som addition med det motsatta talet -3 .

På motsvarande sätt kan varje subtraktion med ett tal skrivas som en addition med det motsatta talet.

Exempel. När man har ett uttryck med flera termer kanske man söker efter enkla beräkningar. I ett uttryck som $23 - 9 - 8$ kan man lockas att först beräkna $9 - 8 = 1$ och sedan svara $23 - 1 = 22$. Detta är en **felaktig strategi**, det rätta svaret är ju $23 - 9 - 8 = 14 - 8 = 6$ (både 9 och 8 ska subtraheras). Ett bra stöd för det egna tänkandet är att kunna tolka subtraktionen som en addition:

$$23 - 9 - 8 = 23 + (-9) + (-8)$$



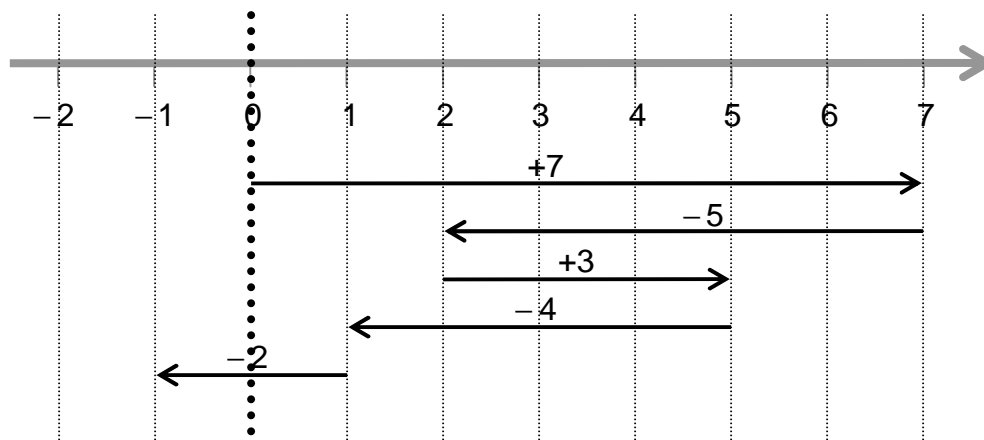
ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Det är generellt en bra strategi att söka efter enkla beräkningar, bara man ser till att de inte förvanskar uppgiften och leder till fel svar (vilket tyvärr hände i sista exemplet). Tolkningen av ett komplicerat uttryck som $7 - 5 + 3 - 4 - 2$ underlättas om man ser uttrycket som en *addition* av fem enskilda termer enligt

$$7 - 5 + 3 - 4 - 2 = 7 + (-5) + 3 + (-4) + (-2)$$

eller, ännu mer utförligt: $(+7) + (-5) + (+3) + (-4) + (-2)$



Den sista pilspetsen pekar mot -1 , som är summan av de fem termerna.

En poäng med att kunna tolka $7 - 5 + 3 - 4 - 2 = 7 + (-5) + 3 + (-4) + (-2)$ som en sammansättning av förflyttningar "framåt7, bakåt5, framåt3, bakåt4, bakåt2" är att vi kan utnyttja det faktum att additionen är *kommutativ*, dvs att vi får addera termerna i vilken ordning som helst.

Exempel. $7 - 5 + 3 - 4 - 2 = 2 + 3 - 4 - 2 = 5 - 4 - 2 = 1 - 2 = -1$

Ett annat sätt är att addera de positiva och negativa termerna var för sig.

Exempel. $7 - 5 + 3 - 4 - 2 = 7 + 3 - 5 - 4 - 2 = (7 + 3) - (5 + 4 + 2) = 10 - 11 = -1$

Vi kan välja att addera termerna i precis vilken ordning som helst, bara vi håller reda på tecknen på de negativa termerna.

Exempel. $7 - 5 + 3 - 4 - 2 = (7 - 5) + (3 - 4) - 2 = 2 - 1 - 2 = -1$

Exempel. $7 - 5 + 3 - 4 - 2 = (7 - 5) + 3 + (-4 - 2) = 2 + 3 - 6 = -1$

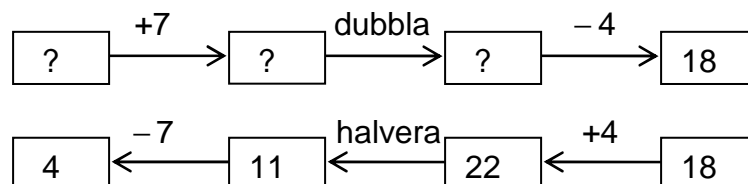
Subtraktion och addition som omvända räknesätt

Exempel. Jag tänker på ett tal. Först lägger jag till 7, sedan dubblar jag resultatet. Dubblingen subtraheras med 4. Då får jag 18. Vilket är talet?

Lösning: Vi kan lista ut svaret genom att resonera baklänges, genom att börja med slutresultatet. Talet 18 var resultatet av subtraktion med 4. Före subtraktionen måste talet varit $18 + 4 = 22$, som i sin tur var en dubbling. Före dubblingen måste vi då haft 11, som i sin tur var resultatet av addition med 7. Före additionen måste vi då haft $11 - 7 = 4$.

Svar: Talet är 4.

Resonemanget i lösningen kan sammanfattas i följande (tanke-)schema:



Lägg märke till att effekten av addition med 7 tas bort genom subtraktion med 7 och att effekten av subtraktion med 4 tas bort genom addition med 4.

Vi kunde med hjälp av beräkningen $18 + 4 = 22$ dra slutsatsen att $22 - 4 = 18$. Särskilt vid huvudräkning är det många som föredrar addition före subtraktion.

Exempel. Du ska köpa en vara som kostar 28 kr, betalar med två 20-lappar och får 12 kr tillbaka. Blev det rätt?

Lösning 1: Betalningen minus kostnaden är $40 - 28 = 2 + 10 = 12$. Stämmer.

Lösning 2: Kostnaden plus växel är $28 + 12 = 40$. Stämmer.

Varje addition av typen $a + b = c$ innehåller (indirekt) två subtraktioner, nämligen $c - a = b$ och $c - b = a$.

Exempel.

$$\begin{array}{ccc}
 & 23 + 48 = 71 & \\
 \nearrow & & \nwarrow \\
 23 = 71 - 48 & & 48 = 71 - 23
 \end{array}$$

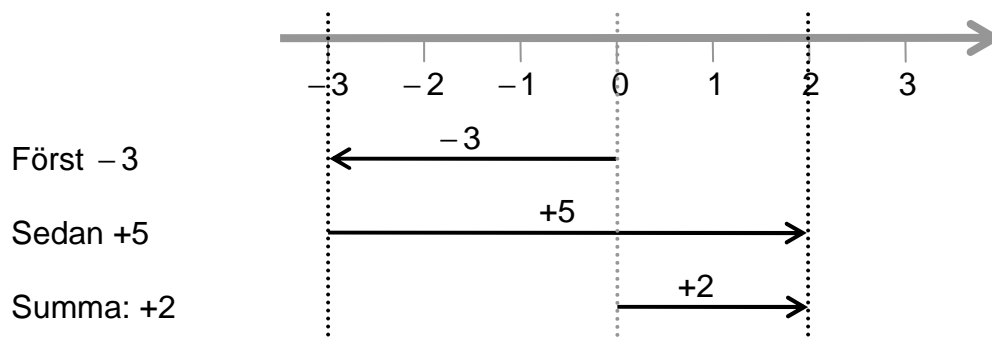
Addition och subtraktion av heltal

Vi börjar med en sammanfattning av vad som redan har gjorts.

- 1) Addition innebär att *lägga till*. Vi kan tolka varje addition på tallinjen genom att lägga talpilar efter varandra.
- 2) Subtraktion innebär att *ta bort*. Vi kan tolka differensen som utfyllnaden från andra till första termen (observera: i den ordningen!).
- 3) Subtraktion med ett positivt heltal kan vi tolka som addition med det motsatta talet. Här utnyttjar vi sambandet mellan räknesätten.

Vi har ännu inte sett något exempel med ett negativt tal som första term. Sådana exempel förekommer sällan i praktiken, men de kan behandlas utifrån ovanstående principer (se de första två exemplen nedan). Vi har heller inte behandlat subtraktion med ett negativt tal. Det gör vi i tredje exemplet nedan.

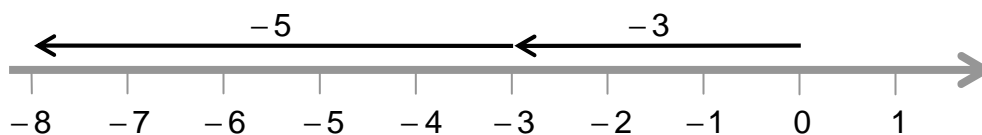
Exempel. Vi kan utföra addition med ett negativt tal som första term, vilket visar vi på tallinjen med $-3 + 5 = 2$.



Alternativt kan vi utföra beräkningen genom att utnyttja additionens kommutativa egenskap (som gäller för alla tal) och beräkna $-3 + 5$ som

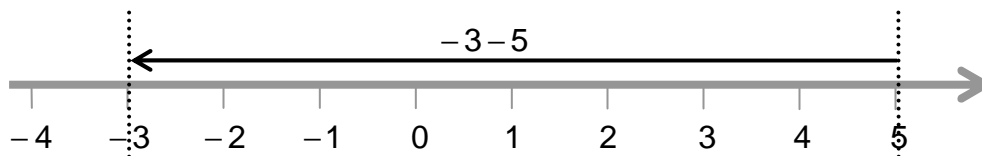
$$-3 + 5 = (-3) + 5 = 5 + (-3) = 5 - 3 = 2$$

Exempel. Vi visar först subtraktionen $-3 - 5 = -8$ med borttagningsmetoden. Då skriver/tänker vi $-3 - 5 = (-3) + (-5)$ och tolkar additionen på tallinjen.



© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Vi kan även utföra $-3 - 5 = -8$ med utfyllnadsmetoden. Differensen, som kan skrivas $-3 - 5 = (-3) - 5$, fyller ut från andra termen 5 till första termen -3 .



Såväl borttagnings- som utfyllnadsmetoden kräver eftertanke när de ska tillämpas som i föregående exempel, med ett negativt tal som första term. Än värre blir det när vi har ett negativt tal i andra termen, dvs när vi ska subtrahera ett negativt tal. Vi diskuterar denna problematik i exemplet nedan.

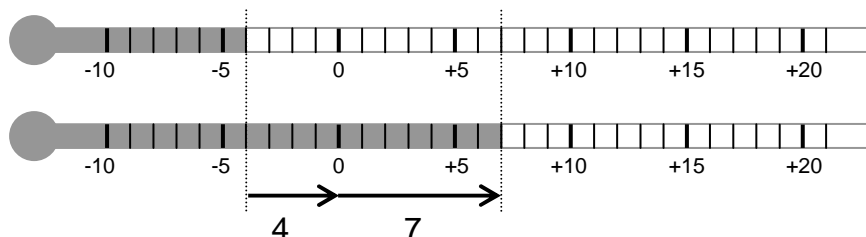
Exempel. Vi ska ge *fem* olika tolkningar av uttrycket $7 - (-4)$.

1. Talet -4 kan tolkas som en utgift. Subtraktion innebär att "ta bort". Vi kan då tolka subtraktion med -4 som att ta bort en utgift. Det låter väl positivt. Att ta bort en 4-utgift är nämligen detsamma som att lägga till 4, dvs

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

2. Vi kan tolka $7 - (-4)$ som en temperaturdifferens. Hur mycket varmare är det mitt på dagen jämfört med på morgonen, om temperaturen mitt på dagen är $+7^\circ\text{C}$ och morgontemperaturen var -4°C ?

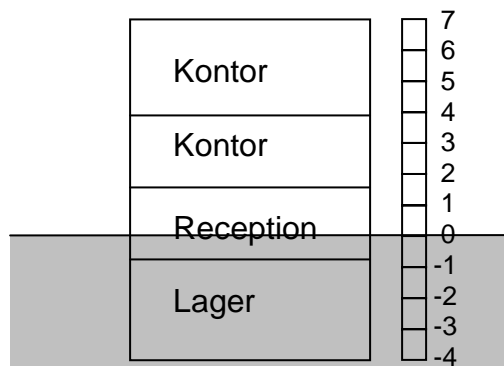
Svar: $7 - (-4) = 7 + 4 = 11^\circ\text{C}$.



ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

3. Ett hus har i genomskärning följande utseende.

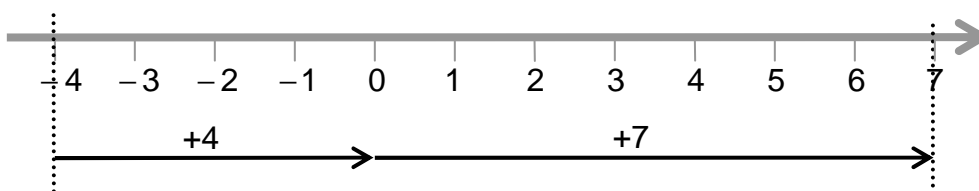


Byggnaden går ner 4 m under marken och sträcker sig 7 m över marken.

Bygghöjden är då $7 - (-4) = 7 + 4 = 11$ meter.

4. Om vi bortser från termometern och huset kan vi fylla ut från andra termen

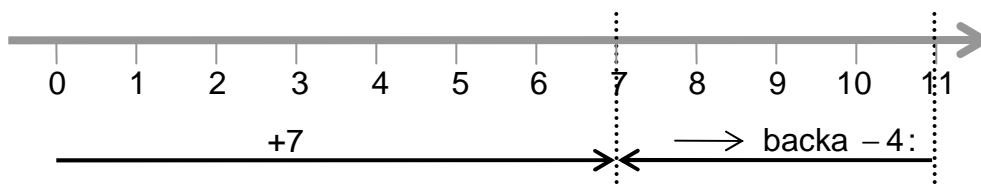
- 4 till första termen 7 med talpilar: $2 - 2 = 2 - 2 = 2 + 2 = 22$.



5. Talet - 4 kan representeras med en talpil åt vänster. Att subtrahera - 4

kan tolkas som att backa längs en - 4-pil. Då går vi 4 steg åt höger, vilket är detsamma som att lägga till 4, dvs

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$



© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

I alla fem tolkningarna kan vi se att subtraktion med -4 kan tolkas som addition med det motsatta talet 4 .

Samband mellan addition och subtraktion

Varje subtraktion kan tolkas som addition med det motsatta talet.

$$a - b = a + (-b)$$

b :s motsatta tal är $-b$

$$a - (-b) = a + b$$

$-b$:s motsatta tal är b

Multiplikation med negativa faktorer

Multiplikation med ett *positivt heltal* som första faktor kan tolkas med *upprepad addition*. Denna regel ska vi använda även i nästa exempel, där andra faktorn är ett negativt heltal.

Exempel. $3 \cdot (-8) = (-8) + (-8) + (-8) = -24$

Eftersom $3 \cdot 8 = 24$ kan uträkningen snabbare utföras enligt

$$3 \cdot (-8) = -3 \cdot 8 = -24 \quad \text{vi bryter ut minustecknet}$$

Multiplikation med ett positivt heltal som andra faktor kan (enligt kommutativa lagen) skrivas med det positiva heltalet som första faktor.

Exempel. Vi kan beräkna produkten $(-3) \cdot 8$ på följande sätt:

$$(-3) \cdot 8 = 8 \cdot (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -24$$

Vi kan snabbare räkna enligt

$$(-3) \cdot 8 = -(3 \cdot 8) = -24 \quad \text{vi bryter ut minustecknet}$$

Produkten $(-3) \cdot 8$ kan även tolkas som subtraktion av tre stycken åttor:

$$(-3) \cdot 8 = -8 - 8 - 8 = -24$$

Varje multiplikation med ett *negativt heltal* som första faktor kan (på motsvarande sätt som i exemplet ovan) tolkas med *upprepad subtraktion*.

Exempel. $(-3) \cdot (-8)$ kan tolkas som en upprepad subtraktion av tre stycken minus-åttor, dvs

$$(-3) \cdot (-8) = -(-8) - (-8) - (-8) = 8 + 8 + 8 = 24$$

Att ta bort tre stycken minusåttor är detsamma som att lägga till tre åttor, dvs

$$(-3) \cdot (-8) = 3 \cdot 8 = 24 \quad \text{två negativa faktorer har en positiv produkt}$$

Vi kan säga att de två minustecknen *tar ut varandra*.

Produkten av två positiva tal är positiv.	$3 \cdot 8 = 24$
Produkten av ett positivt och ett negativt tal är negativ.	$3 \cdot (-8) = -24$
Produkten av ett negativt och ett positivt tal är negativ.	$(-3) \cdot 8 = -24$
Produkten av två negativa tal är positiv.	$(-3) \cdot (-8) = 24$

Den som vill kan räkna (eller tänka) som i följande exempel. En fördel är att man kan sköta teckenhanteringen för sig och multiplikationen av positiva tal för sig. Minus-ettorna fungerar som "teckenkontrollanter".

Exempel. $(-3) \cdot 8 = (-1) \cdot 3 \cdot 8 = (-1) \cdot 24 = -24$

Exempel. $(-3) \cdot (-8) = (-1) \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 8 = (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot 8 = (+1) \cdot 24 = 24$

Exempel. $(-2) \cdot 3 \cdot (-5) \cdot (-4) = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = (-1) \cdot 120 = -120$

Division med negativa tal

Vi kan använda kopplingen mellan division och multiplikation för att bestämma kvotens värde om täljare och/eller nämnare är negativa tal.

Exempel. Eftersom $3 \cdot (-8) = -24$, så är $\frac{-24}{3} = -8$.

Exempel. Eftersom $(-3) \cdot (-8) = 24$, så är $\frac{24}{-3} = -8$.

Exempel. Eftersom $(-3) \cdot 8 = -24$, så är $\frac{-24}{-3} = 8$.

Kvoten av två positiva tal är positiv.

$$\frac{24}{3} = 8$$

Kvoten av ett positivt och ett negativt tal är negativ.

$$\frac{24}{-3} = -8$$

Kvoten av ett negativt och ett positivt tal är negativ.

$$\frac{-24}{3} = -8$$

Kvoten av två negativa tal är positiv.

$$\frac{-24}{-3} = 8$$

KAPITEL 5

LIKHET OCH OLIKHET

Likhetstecken

Likhetstecken använder vi när vi gör uträkningar, exempelvis

$$3 + 5 = 8$$

Vi tänker att vi räknar "från vänster till höger" och kan säga: "tre plus fem **blir** 8".

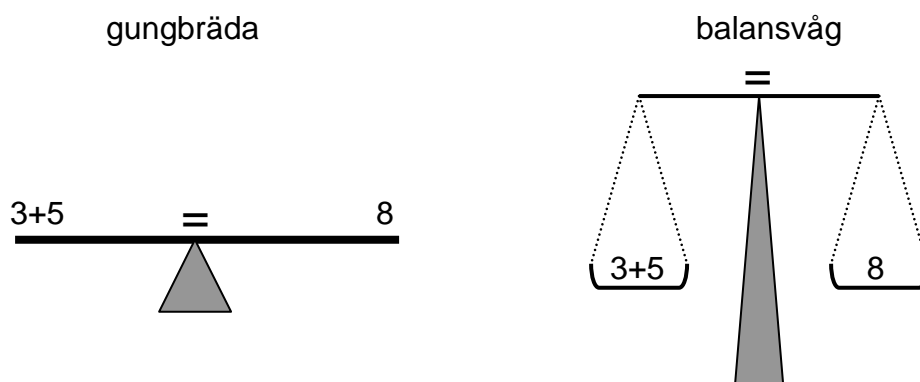
$$3 + 5 \xrightarrow{\quad} = 8$$

Vi kan också använda likhetstecken när vi vill säga att två uttryck har *samma värde*, exempelvis $3 + 5 = 5 + 3$.

Här har vänster led $3 + 5$ och höger led $5 + 3$ i någon mening samma status. Vi kan läsa likheten från vänster till höger eller från höger till vänster: "tre plus fem är lika med fem plus tre" eller "fem plus tre är lika med tre plus fem".

$$3 + 5 \xrightarrow{\quad} = 5 + 3 \xleftarrow{\quad}$$

När man har likhet mellan vänster led och höger led kan man säga att det råder "jämvikt" (som på en gungbräda) eller "balans" (som på en balansvåg).



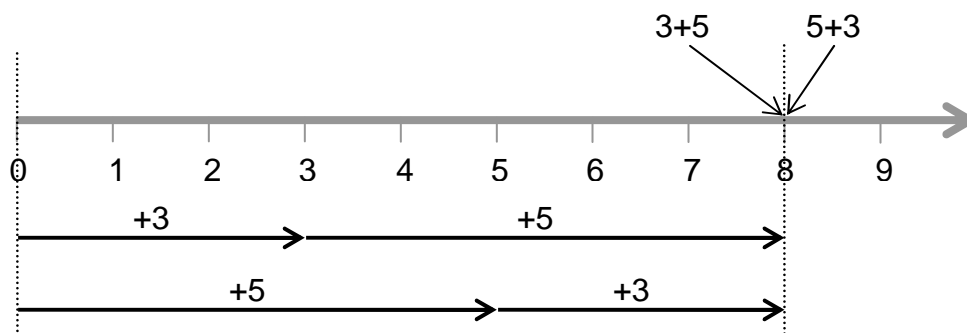
Det är inte helt enkelt att matematiskt *definiera* vad som menas med att två tal är lika. Vi kan ofta nöja oss med följande tolkning.

Allmänt gäller att vi sätter *likhetstecken* mellan två tal eller två uttryck om talen/uttrycken har *samma position* på tallinjen.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Just därför är det tillåtet att sätta likhetstecken mellan $3+5$ och 8 , likaså mellan $3+5$ och $5+3$.



Många likheter är långt ifrån självklara, vilket inses av följande exempel.

Exempel. Vi ska visa att decimaltalet $0,999\dots$ (nior i all oändlighet) är lika med 1.

Vi sätter $x = 0,999\dots$ och multiplicerar med 10. Då får vi

$$10x = 9,999\dots$$

Därav följer att

$$10x - x = 9,999\dots - 0,999$$

$$9x = 9$$

$$\frac{9x}{9} = \frac{9}{9}$$

$$x = 1$$

Slutsatsen är att $0,999\dots = 1$, vilket även kan skrivas

$$0,999\dots = 1,000\dots$$

Två decimaltal kan alltså vara lika, trots att de inte har samma decimaler.

Talmängder

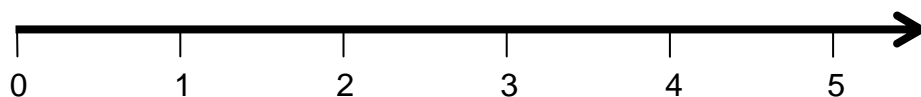
”Det finns tre äpplen i skålen”

”Jag står trea i kön”

Talet 3 kan som ovan användas för att uttrycka

antal (3 äpplen) och *ordning* (3:a i kön)

Talet 3 är ett av de *naturliga talen*. Dessa tal kan markeras på en tallinje.



Mängden av alla naturliga tal betecknas med bokstaven **N**. Denna mängd innehåller talen 0, 1, 2, 3 osv. Man kan skriva

$$\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

I vardagen klarar man sig ganska bra med enbart naturliga tal, men när man löser matematiska uppgifter inser man snart att det behövs fler tal än heltalen.

Uppgift	Svar	Tal	Talmängd
Olle är 5 år yngre än sin bror, som är 7 år gammal. Hur gammal är Olle?	2 år	2	N (naturliga talen)
Igår var temperaturen +6°C. Idag är det 10 grader kallare. Hur kallt är det idag?	-4°C	-4	Z (heltalen)
Tre personer ska dela på två pizzor. Hur mycket får var och en?	$\frac{2}{3}$ pizza	$\frac{2}{3}$	Q (rationella talen)
En kvadrat har arean 5 m ² . Hur lång är kvadratens sida?	$\sqrt{5}$ m ²	$\sqrt{5}$	R (reella talen)
Ett tal multipliceras med sig självt. Produkten är -4. Vilket är talet?	2i eller -2i	2i	C (komplexa talen)

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

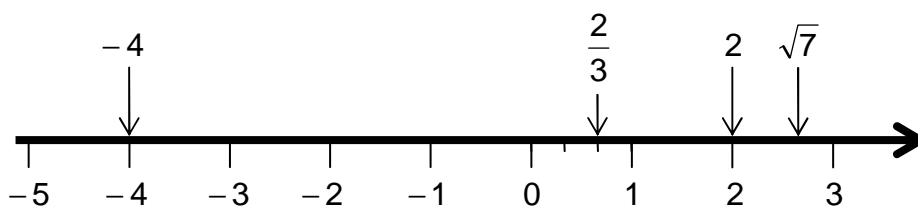
De första fyra typerna av tal ska vi strax arbeta vidare med. De komplexa talen kommer du att möta om du studerar mer matematik. Gemensamt för naturliga tal, heltal, rationella tal och reella tal är att de kan placeras på en tallinje. Heltal som

2 och -4 är lätta att placera in. För att kunna placera talet $\frac{2}{3}$ på tallinjen

behöver vi dela in utrymmet mellan 0 och 1 i tre lika långa delar och sätta

markeringen efter de två första delarna. Talet $\sqrt{7}$ är riktigt knepigt. Vi nöjer oss

här med att konstatera att $\sqrt{7}$ ligger mellan $\sqrt{4} = 2$ och $\sqrt{9} = 3$.



N är den minsta av talmängderna **N**, **Z**, **Q** och **R**. Varje tal i **N** är ett heltal och ingår således i **Z**, men hur kan vi veta att varje tal i **N** ingår i **Q**?

Vad är **Q**?

Vi behöver precisera vad som ingår i talmängderna.

Definition av talmängderna **N**, **Z**, **Q** och **R** :

$$\mathbf{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbf{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$$

$$\mathbf{Q} = \left\{ \text{tal som kan skrivas på formen } \frac{a}{b}, \text{ med heltal } a \text{ och } b \right\}$$

$$\mathbf{R} = \{ \text{alla tal på tallinjen} \}$$

(får inte vara 0)

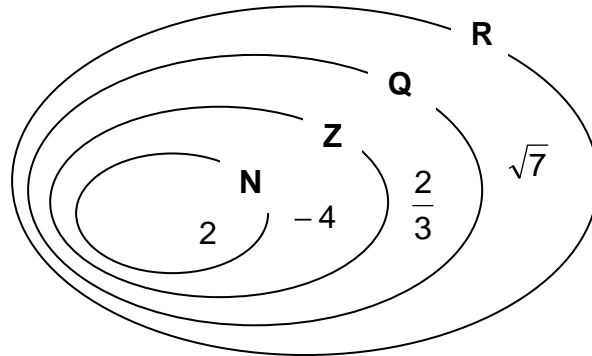
Nu kan vi exempelvis reda ut att talet 2 ingår i **Q**, eftersom vi kan skriva $2 = \frac{2}{1}$.

Eftersom talet 2 har en plats på tallinjen ingår talet 2 även i **R**.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Bilden nedan visar *hierarkin* mellan talmängderna, dvs hur de ingår i varandra.



Exempelvis gäller att $\sqrt{7}$ ingår i **R** men inte i **Q**. För att visa detta krävs att man har kunskaper i *talteori*, särskilt *primtalsfaktorisering*.

Vi ska nu ge en skiss av beviset av att $\sqrt{7}$ inte är ett rationellt tal. Detta bevis bygger på samma idé som det bevis den grekiske matematikern *Euklides* (som var verksam i Alexandria ca 300 f.Kr.) använde i sitt berömda verk *Elementa* för att bevisa att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal.

Antag att $\sqrt{7}$ är ett rationellt tal. Vi ska visa att detta antagande leder till orimligheter.

Skriv till att börja med $\sqrt{7}$ som $\frac{a}{b}$, där vi väljer heltalen a och b så att de **inte har några gemensamma faktorer 7**.

När vi kvadrerar $\sqrt{7} = \frac{a}{b}$ får vi $7 = \frac{a^2}{b^2}$.

Multiplikation med b^2 i båda leden ger $7b^2 = a^2$.

Denna ekvation visar att a^2 innehåller en faktor 7.

Då måste även a innehålla en faktor 7. Därmed innehåller a^2 två faktorer 7.

Vi kan då skriva $a^2 = 7 \cdot 7 \cdot c$, där c är den heltalsfaktor som "blir över" när vi har faktoreriserat ut de två sjuorna.

Vi kan nu skriva $7 \cdot b^2 = 7 \cdot 7 \cdot c$, som efter division med 7 i båda leden ger $b^2 = 7c$.

Denna ekvation visar att b^2 innehåller en faktor 7. Då måste även b innehålla en faktor 7.

Vi har nu visat att både a och b innehåller en faktor 7, dvs **de har en gemensam faktor 7**.

Olikheter

Talet 3 har sin position på tallinjen till höger om det mindre talet 2. Vi kan skriva

$2 < 3$ 2 är mindre än 3 (2 är till vänster om 3) (2 står före 3)
eller $3 > 2$ 3 är större än 2 (3 är till höger om 2) (3 står efter 2)

Lägg märke till att *spetsen* i olikhetstecknen $<$ och $>$ pekar mot det *mindre* talet.

Det spelar ingen roll om vi skriver $2 < 3$ eller $3 > 2$ eftersom båda olikheterna har precis samma innebörd. På motsvarande sätt kan vi skriva antingen

$3 < 4$ 3 är mindre än 4 3 är till vänster om 4
eller $4 > 3$ 4 är större än 3 4 är till höger om 3

KAPITEL 6

PROBLEMLÖSNING

Enkel procenträkning

Ibland vill man räkna med en del av någonting. Det kan vara hälften av 300 kronor, en fjärdedel av 60 kg eller en hundraedel av en sekund.

När man räknar procent så räknar man just hundraedlar. Några exempel:

1% av 300 kr är lika med 3 kr
1% av 4500 kr är lika med 45 kr

Uppgift: Hur mycket är 30% av 250 kronor?

Lösning:

100% är 250 kr
10% är en tiondel av 100%: $\frac{250}{10} = 25$ kr
30% är tre gånger 10%: $3 \cdot 25 = 75$ kr

Svar: 75 kr

Man kan kortfattat skriva så här:

100% ↔ 250
10% ↔ 25
30% ↔ 75

Uppgift: Hur mycket ska du betala i kommunalskatt på inkomsten 57000 kr om kommunalskattesatsen är 31,48% ?

Lösning:

100% ↔ 57000
10% ↔ 5700
1% ↔ 570
31,48% ↔ $31,48 \cdot 570 \approx 17900$

Svar: Du ska betala 17900 kr.

Om första faktorn 31,48 görs 100 ggr mindre (dividera med 100) och andra faktorn 570 görs 100 ggr större (multiplicera med 100) så kan produkten skrivas på formen

$$31,48 \cdot 570 = \frac{31,48}{100} \cdot 570 \cdot 100 = 0,3148 \cdot 57000$$

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Genom att skriva om skattesatsen 31,48% i decimalform som 0,3148 får vi ett effektivt sätt att räkna procent.

Exempel. Med decimalformen kan vi snabbt räkna ut att 75% av 3400 kr är

$$0,75 \cdot 3400 = 2550 \text{ kr}$$

$$\text{Allmänt gäller att } p\% \text{ av } K \text{ kr är } \frac{p}{100} \cdot K \text{ kr}$$

Exempel. 42% av 630 kr är

$$\frac{42}{100} \cdot 630 = 0,42 \cdot 630 \approx 265 \text{ kr}$$

Enkel bråkräkning

Vi har flera sätt att räkna ut 30% av 250 kr.

$$\begin{array}{l} 1. \quad 100\% \leftrightarrow 250 \\ \quad \quad 10\% \leftrightarrow 25 \\ \quad \quad 30\% \leftrightarrow 3 \cdot 22 = 22 \end{array}$$

$$2a. \quad \text{med räknare:} \quad 0,30 \cdot 250 = 75$$

$$2b. \quad \text{utan räknare:} \quad 0,30 \cdot 250 = 3 \cdot 25 = 75$$

$$3a. \quad \text{med räknare:} \quad \frac{30}{100} \cdot 250 = 75$$

$$3b. \quad \text{utan räknare:} \quad \frac{30}{100} \cdot 250 = 30 \cdot \frac{250}{100} = 30 \cdot 2,5 = 60 + 15 = 75$$

Några av dessa lösningssätt kan användas rakt av när vi räknar med annat än hundradelar, exempelvis femtedelar.

Uppgift: Hur mycket är 3 femtedelar av 250 kr?

$$\begin{array}{l} 1. \quad 5 \text{ femtedelar} \leftrightarrow 250 \\ \quad \quad 1 \text{ femtedel} \quad \leftrightarrow 50 \\ \quad \quad 3 \text{ femtedelar} \leftrightarrow 222 \end{array}$$

$$2a. \quad \text{med räknare:} \quad 0,60^{(1)} \cdot 250 = 150$$

$$2b. \quad \text{utan räknare:} \quad 0,60^{(1)} \cdot 250 = 6 \cdot 25 = 150$$

$$3a. \quad \text{med räknare:} \quad \frac{3}{5} \cdot 250 = 150$$

$$3b. \quad \text{utan räknare:} \quad \frac{3}{5} \cdot 250 = 3 \cdot \frac{250}{5} = 3 \cdot 50 = 150$$

⁽¹⁾ För att kunna använda lösningarna 2a och 2b måste vi veta att 3 femtedelar kan skrivas som 0,60. Vi ska snart reda ut hur detta hänger ihop.

Uppgiften att beräkna 3 femtedelar av 250 kr är ganska "snäll" i den meningen att beräkningarna går jämnt ut: talen 3, 5 och 250 passar bra ihop. Ibland blir räkningarna krångligare, men då kan man åtminstone använda sig av 1 och 3a.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Uppgift: Hur mycket är 4 sjundedelar av 500 kr?

$$\begin{aligned} 1. \quad 7 \text{ sjundedelar} &\leftrightarrow 500 \\ 1 \text{ sjundedel} &\leftrightarrow \frac{500}{7} \quad (\approx 71,4) \\ 4 \text{ sjundedelar} &\leftrightarrow 4 \cdot \frac{500}{7} \approx 286 \end{aligned}$$

$$3a. \quad \text{med räknare:} \quad \frac{4}{7} \cdot 500 \approx 286$$

Bråkräkning

Vad är tre femtedelar av 100 kronor?

Lösning 1:

En femtedel av 100 kr är $\frac{100}{5} = 20$ kr.

Tre femtedelar av 100 kr är då $3 \cdot 20 = 60$ kr.

Lösning 2:

Tre femtedelar av 100 är lika mycket som en femtedel av 300 (klurigt!).

En femtedel av 300 är $\frac{300}{5} = 60$.

Vi kan sammanfatta lösningarna med följande uppställningar.

Lösning 1: $3 \cdot \frac{100}{5} = 3 \cdot 20 = 60$

Lösning 2: $\frac{3 \cdot 100}{5} = \frac{300}{5} = 60$

Kombinatorik

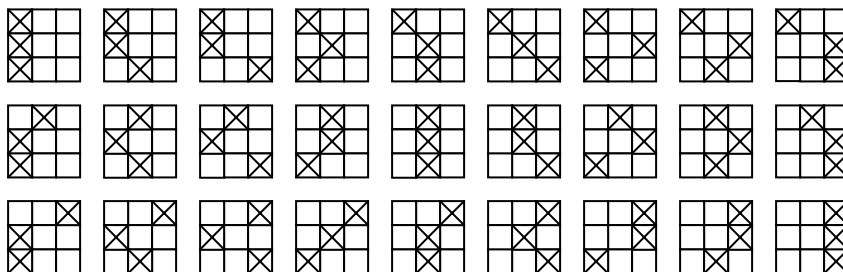
Uppgift: Ett läxprov består av 3 frågor med svarsalternativ a, b, c. Varje elev kryssar i ett alternativ på varje fråga.

Är det möjligt att alla eleverna lämnar in olika svar?

Läxprov MA 8F			
1. $3 + 2 \cdot 7 =$	a:17	b:35	c:12
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. $8 + 6/2 =$	a:7	b:16	c:11
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.	a:3	b:0	c:5
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösning: Vi listar först ut hur många olika svar det finns.

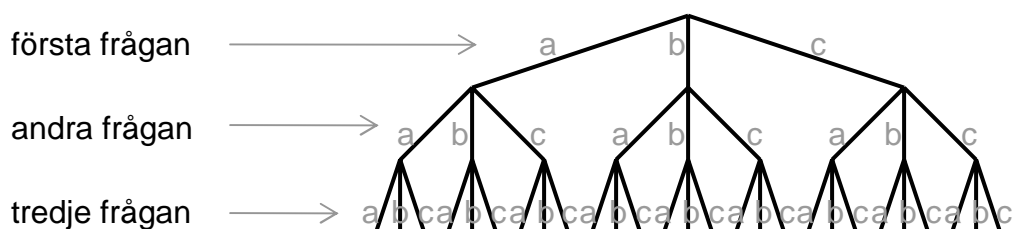
Exempelvis kan vi rita upp alla möjliga svar:



eller skriva ner svarsalternativen:

aaa	aab	aac	aba	abb	abc	aca	acb	acc
baa	bab	bac	bba	bbb	bbc	bca	bc b	bcc
caa	cab	cac	cba	cbb	cbc	cca	ccb	ccc

eller rita ett *träddiagram*, där vi redovisar en fråga i taget:



Oavsett vilken metod vi väljer, så ser vi att det finns 27 olika svar.

Svar: Om det är högst 27 elever i klassen, så är det möjligt att alla har olika svar. Om det är fler än 27 elever så måste några ha samma svar.

ARBETSMATERIAL UNDER UTVECKLING

© Håkan Sollervall 2006. Får skrivas ut i ett exemplar för eget bruk.

Lägg märke till att träddiagrammet förgrenade sig med en faktor 3 för varje fråga.

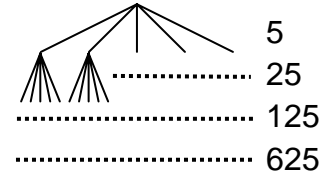
Totala antalet "löv" i trädet blev $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Om det hade varit 4 frågor med vardera 3 svarsalternativ så hade antalet möjliga svar varit

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Om det hade varit 4 frågor med vardera 5 svarsalternativ:

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ möjliga svar}$$



Vilket tal tänker jag på?

Låt oss börja med två enkla exempel, för att komma i rätt stämning.

Exempel. Om jag multiplicerar ett tal med 2 får jag 14. Vilket är talet?

Lösning: 2 gånger talet är 14. Talet är alltså $\frac{14}{2} = 7$.

Exempel. Om jag subtraherar 3 från ett tal får jag 11. Vilket är talet?

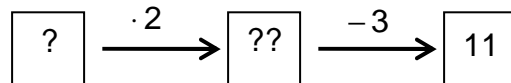
Lösning: Talet minus 3 är 11. Talet är alltså $11 + 3 = 14$.

I det första exemplet tar vi bort multiplikationen genom att använda division.
I det andra exemplet tar vi bort subtraktionen genom att använda addition.

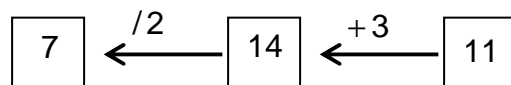
I nästa exempel ingår två operationer, både subtraktion och multiplikation.

Exempel. Jag tänker på ett tal. Detta tal multiplicerar jag med 2, sedan subtraherar jag 3 från produkten. Då får jag talet 11. Vilket tal tänker jag på?

Lösning: Vi kan sammanfatta det sökta talets förändring med följande schema.



Nu gäller det att arbeta baklänges, så att operationerna $\cdot 2$ och -3 tas bort. Vi måste börja med att ta bort -3 , eftersom den operationen sitter närmast 11.



Svar: Det sökta talet är 7.

Ekvationer

Ekvation betyder likhet. Vi vet att likhetstecken får skrivas mellan tal som har samma position på tallinjen. Exempelvis gäller detta

$$5 + 3 = 8 \quad \text{som är en SANN likhet}$$

Det kan hända att man räknar fel, man kanske skriver

$$16 - 9 = 5 \quad \text{som är en FALSK likhet (16 - 9 är ju lika med 7)}$$

När man arbetar med ekvationer ingår normalt en *variabel* (eller flera variabler).

Ett exempel är

$$2x - 3 = 11$$

För vissa värden på variabeln, som i detta fall kallas x , är likheten sann. För andra värden på variabeln är den falsk. Exempelvis:

$$2x - 3 = 11 \quad \text{är SANN för } x = 7 \quad (\text{eftersom } 2 \cdot 7 - 3 = 14 - 3 = 11)$$

$$2x - 3 = 11 \quad \text{är FALSK för } x = 8 \quad (\text{eftersom } 2 \cdot 8 - 3 = 16 - 3 = 13 \neq 11)$$

Att lösa en ekvation innebär att *finna samtliga värden på variabeln som gör likheten sann.*

Varje värde på variabeln som gör *likheten sann* är en *rot* till ekvationen. Ekvationens *lösning* utgörs av samtliga rötter.

Exempelvis är $x = 7$ en rot till ekvationen $2x - 3 = 11$.

När man löser en ekvation försöker man utföra sådana operationer som gör att den behåller sitt sanningsvärde.

Exempel.	$2x - 3 = 11$	addera 3 till båda leden
	$2x - 3 + 3 = 11 + 3$	förenkla
	$2x = 14$	dividera med 2 i båda leden
	$\frac{2x}{2} = \frac{14}{2}$	förenkla
	$x = 7$	

Svar: Ekvationen $2x - 3 = 11$ har lösningen $x = 7$.